ალბათობის თეორია

თავი I

ალბათობის თეორიის ელემენტები

შემთხვევითი მოვლენის ცალკეულ შესაძლო შედეგს **ელემენტარული ხდომილება** ეწოდება, მათ ერთობლიობას – **ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე** და აღინიშნება Ω ასოთი: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$.

თუ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე სასრულია, ჩვენ შეგვიძლია ჩამოვთვალოთ მისი ელემენტები. იმ შემთხვევაში, როცა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე დიდია ან უსასრულოა, მაშინ მოხერხებულია მისი ელემენტები აღიწეროს რაიმე თვისებით (წესით). მაგალითად, თუ ექსპერიმენტის (დაკვირვების) შესაძლო შედეგებია მსოფლიოს ის ქალაქები, რომელთა მოსახლეობა მილიონს აღემატება, მაშინ შესაბამისი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე ჩაიწერება შემდეგნაირად:

Ω={x : x არის ქალაქი, რომლის მოსახლეობა 1000000-ზე მეტია}.

ანალოგიურად, თუ ჩვენ შემთხვევით ვირჩევთ წერტილს 3 რადიუსის მქონე წრიდან ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, მაშინ:

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 9\}.$$

აღსანიშნავია, რომ ერთი და იგივე ექსპერიმენტი შეიძლება აღიწეროს სხვადასხვა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცით იმის მიხედვით, თუ რითი ინტრესდება ექსპერიმენტატორი. მაგალითად, კამათლის გაგორებისას, თუ ჩვენ გვაინტერესებს რომელი რიცხვი გამოჩნდება მის ზედა წახნაგზე, მაშინ $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$, ხოლო თუ ჩვენ გვაინტერესებს ეს რიცხვი კენტია თუ ლუწი, მაშინ $\Omega_2 = \{\text{კენტი, ლუწი}\}$. ამ შემთხვევაში Ω_1 შეიცავს მეტ ინფორმაციას ვიდრე Ω_2. მაგ.: თუ ჩვენ ვიცით Ω_1-ის რომელი ელემენტი მოხდა, მაშინ შეგვიძლია ვთქვათ Ω_2-ის რო-

მელ ელემენტარულ ხდომილებას ჰქონდა ადგილი, მაგრამ, პირიქით, ეს შეუძლებელია. სასურველია, საზოგადოდ, ვისარგებლოთ ექსპერიმენტთან დაკავშირებული მაქსიმალური ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცით.

მაგალითი 1. დავუშვათ, რომ ჩვენ შემთხვევით ვარჩევთ ქარხნის მიერ გამოშვებულ სამ ნაწარმს და ვამოწმებთ თითოეულ მათგანს სტანდარტულია (ს) თუ წუნდებული (წ). მაშინ მაქსიმალური ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega_1 = \{\text{სსს}, \text{სსწ}, \text{სწს}, \text{წსს}, \text{სწწ}, \text{წსწ}, \text{წწს}, \text{წწწ}\}.$$

უფრო ნაკლები ინფორმაციის შემცველი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega_2 = \{0,1,2,3\},$$

რომელიც გვიჩვენებს, თუ არჩეული სამი ნაწარმიდან რამდენია სტანდარტული (ან წუნდებული).

სავარჯიშოები: **I.** მონეტის ერთხელ აგდებისას – Ω={გ, ს}; **II.** მონეტის ორჯერ აგდებისას, ან ორი მონეტის ერთდროულად აგდებისას – Ω={გგ, გს, სგ, სს}; **III.** მონეტის სამჯერ აგდებისას, ან სამი მონეტის ერთდროულად აგდებისას – Ω= {გგგ, გგს, გსგ, სგგ, გსს, სგს, ssგ, სსს}; **IV.** მონეტის n-ჯერ აგდებისას $\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, ..., a_n), a_i = \text{გ} \ \text{ ან } \ \text{ს}\}$ და შედეგების საერთო რაოდენობა ტოლია 2^n-ის; **V.** ერთი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}; **VI.** ვთქვათ, თავიდან ვაგდებთ მონეტას. თუ მოვა გერბი, მაშინ ვაგორებთ სათამაშო კამათელს; ხოლო თუ მოვა საფასური, მაშინ კიდევ ერთჯერ ვაგდებთ მონეტას. ამ შემთხვევაში $\Omega = \{\text{გ}1, \text{გ}2, \text{გ}3, \text{გ}4, \text{გ}5, \text{გ}6, \text{სგ}, \text{სს}\}$; **VII.** ორი სათამაშო კამათლის გაგორებისას – Ω={(1,1); (1,2); . . .; (1,6); (2,1); (2,2); . . . ; (2,6); . . . ; (6,1); . . . ; (6,6)} ანუ $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,...,6\}$; **VIII.** პროდუქციის ვარგისიანობის დადგენისას – Ω={„ვარგისი“, „უვარგისი“}; **IX.** სატელეფონო სადგურში გამოძახებათა რაოდენობა – Ω={0, 1, 2, . . . }; **X.** ძაბვა ქსელში – Ω={[0, 220]}.

ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ნებისმიერ ქვესიმრავლეს **ხდომილება** ეწოდება. თუ ექსპერიმენტის კონკრეტული შედეგი ეკუთვნის რაიმე ხდომილებას, მაშინ ამბობენ რომ ეს ხდომილება **მოხდა,** ხოლო რომელსაც არ ეკუთვნის – ის ხდომილება **არ მოხდა.** ხდომილებები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: $A, B, C, D, \ldots$. ხდომილებას $A = \Omega$ უწოდებენ **აუცილებელ ხდომილებას,** *ხოლო* Ø-ს – **შეუძლებელ ხდომილებას.** A და B ხდომილების **გაერთიანება** (ან **ჯამი)** ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ამ ხდომილებებიდან ერთი მაინც ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \cup B$ (ან $A + B$). A და B ხდომილების **თანაკვეთა** (ან **ნამრავლი)** ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ეს ხდომილებები ერთდროულად ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \cap B$ (ან AB). A ხდომილების **საწინააღმდეგო** ხდომილება ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა A არ ხდება და აღინიშნება სიმბოლოთი $\overline{A}$. A და B ხდომილების **სხვაობა** ეწოდება ისეთ ხდომილებას, რომელიც ხდება მაშინ, როცა ხდება A, მაგრამ არ ხდება B და აღინიშნება სიმბოლოთი $A \setminus B$. A და B ხდომილებას ეწოდება **უთავსებადი** თუ $A \cap B =$Ø.

თუ Ω -ს ნებისმიერ ელემენტარულ ხდომილებას ω_i შეესაბამება გარკვეული რიცხვები $p_i = P(\omega_i)$, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს: $0 \le p_i \le 1$ და $\sum_i p_i = 1$, მაშინ ამ რიცხვებს ეწოდებათ ω_i ელემენტარული ხდომილებების **ალბათობები.** $P(A) := \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$. თუ $P(\omega_i) = const$ და $|\Omega| < \infty$, ვღებულობთ **ალბათობის კლასიკურ განმარტებას:** $P(A) = |A| / |\Omega|$.

ხდომილების **სტატისტიკურ ალბათობად** ითვლება ამ ხდომილების ფარდობითი სიხშირე $W_N(A) = M / N$ (სადაც $N -$ ცდათა საერთო რიცხვია, M კი – A ხდომილების მოხდენათა რიცხვი) ან მასთან ახლოს მყოფი რიცხვი (მათემატიკურად ზუსტი ფორმულირება ასეთია: $P(A) = \lim_{N \to \infty} W_N(A)$).

გეომეტრიული ალბათობა. თუ L მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ წერტილს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ აგდებული

წერტილი დაეცემა $l \subset L$ მონაკვეთზე: $P = |l|/|L|$. ანალოგიური განმარტება გვაქვს სიბრტყეზე და სივრცეში.

მაგალითი 2. მრგვალი სამიზნის ფართობი არის 143 კვ.ინჩი. სამიზნის ცენტრში მდებარე წრიულ არეს, რომლის ფართობია 1 კვ.ინჩი უწოდებენ „ხარის თვალს“. დანარჩენი არე დაყოფილია 20 სექტორად, რომლებიც გადანომრილია 1-დან 20-მდე. „ხარის თვალის“ გარეთ არის აგრეთვე სამჯერადი რგოლი ფართობით 10 კვ. ინჩი და ორჯერადი რგოლი ფართობით 15 კვ. ინჩი. ვიგულისხმოთ, რომ სამიზნეს შემთხვევით ესვრიან ისარს და ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დაზიანდება: ა) ორჯერადი რგოლი მე-14 სექტორში; ბ) მე-14 სექტორი, მაგრამ არა ორჯერადი რგოლი; გ) სამჯერადი რგოლი ან „ხარის თვალი“; დ) ლუწნომრიანი სექტორი ან ორჯერადი რგოლი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A = \{\text{დაზიანდა მე-14 სექტორი}\}$,

$B = \{\text{დაზიანდა "ხარის თვალი"}\}$,

$D = \{\text{დაზიანდა ორჯერადი რგოლი}\}$,

$T = \{\text{დაზიანდა სამჯერადი რგოლი}\}$,

$E = \{\text{დაზიანდა ლუწნომრიანი სექტორი}\}$.

ცხადია, რომ თითოეული სექტორის ფართობი იქნება $(143-1)/20 = 7.1$ კვ.ინჩი, ხოლო ორჯერად რგოლს თითოეულ სექტორთან საერთო ექნება $15/20 = 0.75$ კვ. ინჩი ფართი. ამიტომ, ალბათობის გეომეტრიული განმარტების თანახმად, საძიებელი ალბათობები იქნება შესაბამისად:

ა) $P(D \cap A) = 0.75/143 \approx 0.005$;

ბ) $P(A \setminus D) = P(A) - P(A \cap D) = 7.1/143 - 0.75/143 \approx 0.044$;

გ) $P(B \cup T) = P(B) + P(T) = 1/143 + 10/143 \approx 0.077$;

დ) $P(E \cup D) = P(E) + P(D) - P(E \cap D) = 10 \cdot 7.1/143 + 15/143 - 10 \cdot 0.75/143 \approx 0.55$.

ბერტრანის პარადოქსი. შემთხვევით იღებენ (ავლებენ) ქორდას წრეში. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ქორდის სიგრძე აღემატება წრეში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდს?

ამოხსნა 1. სიმეტრიის მოსაზრებიდან გამომდინარე წინასწარ შეიძლება მოცემულ იქნეს ქორდის მიმართულება. გავავ-

ლოთ ქორდის პერპენდიკულარული დიამეტრი. მაშინ მხოლოდ ის ქორდა აღემატება ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდს, რომელიც კვეთს დიამეტრს მისი სიგრძის 1/4-დან 3/4-მდე. შესაბამისად, ალბათობის გეომეტრიული განმარტების თანახმად, საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$[(3/4-1/4)2r]/2r=1/2.$$

ამოხსნა 2. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ქორდის ერთი ბოლო დავაფიქსიროთ წრეწირზე. ამ წერტილში გავლებული მხები და ჩახაზული წესიერი სამკუთხედის ორი გვერდი, რომლის წვერო ამ წერტილშია, ქმნის სამ 60 გრადუსის ტოლ კუთხეს. ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს მხოლოდ ის ქორდები, რომლებიც ხვდება შუათანა 60 გრადუსიანი კუთხის შიგნით. ამიტომ ამ გზით გამოთვლილი საძიებელი ალბათობა იქნება:

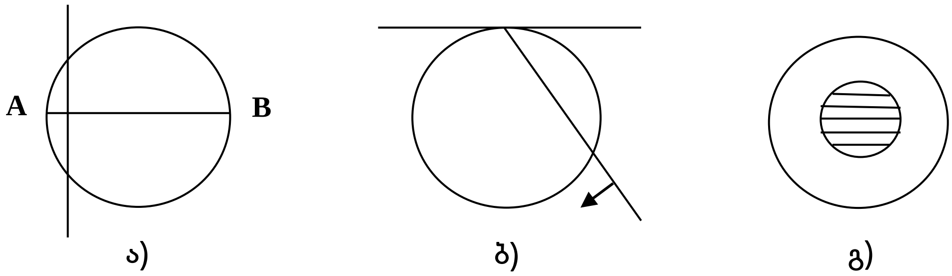
$$60^{\circ}/180^{\circ}=1/3.$$

ამოხსნა 3. ქორდის მდებარეობის დასადგენად საკმარისია დავასახელოთ მისი შუაწერტილი. ქორდა აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მისი შუაწერტილი მოთავსებულია მოცემული წრეწირის კონცენტრული წრეწირის შიგნით, რომლის რადიუსი პირვანდელის ნახევარია. ამიტომ საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$\pi(r/2)^2/\pi r^2=1/4.$$

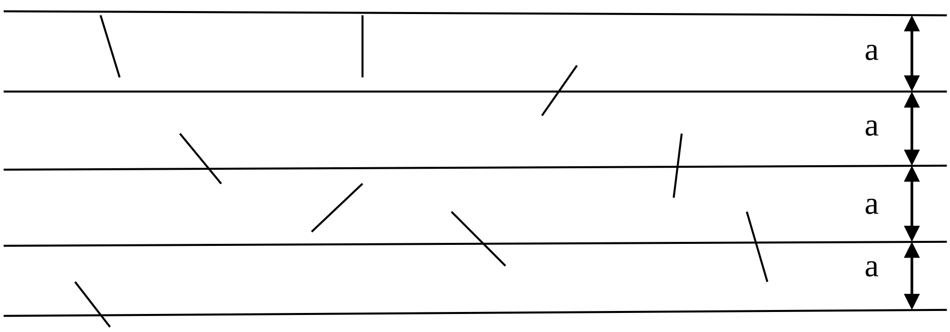
პარადოქსის ახსნა. საქმე იმაშია, რომ ამოცანის პირობაში არაა დაზუსტებული რა იგულისხმება ქორდის შემთხვევით გავლებაში. პირველ შემთხვევაში, დიამეტრის გასწვრივ ვასრიალებთ ღერძს, ის შეიძლება გაჩერდეს დიამეტრის ნებისმიერ წერტილზე. ტოლალბათურად ითვლება ღერძის გაჩერება დიამეტრის ტოლი სიგრძის ინტერვალებში, მათი მდებარეობისგან დამოუკიდებლად დიამეტრის შიგნით. მეორე შემთხვევაში, წრეწირის ერთ წერტილში დამაგრებული ღერძი ასრულებს 180 გრადუსიან რხევას და ითვლება, რომ ღერძის გაჩერება მოცემული სიგრძის რკალის შიგნით დამოკიდებულია მხოლოდ რკალის სიგრძეზე და არა მის მდებარეობაზე, ანუ ტოლალბათურად ითვლება ღერძის გაჩერება წრეწირის ტოლი სიგრძის რკა-

ლებში. რაც შეეხება მესამე ამოხსნას, აქ წერტილს ვაგდებთ r რადიუსიანი წრის შიგნით და ვეძებთ ალბათობას იმისა, რომ ის მოხვდება $r/2$ რადიუსის მქონე კონცენტრული წრის შიგნით. შესაბამისად, სხვადასხვა პასუხი აიხსნება ამოცანის სხვადასხვანაირი დასმით.

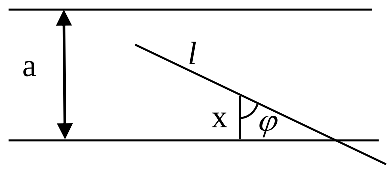


მაგალითი 3 (ბიუფონის ამოცანა). სიბრტყე დაყოფილია თანაბრად (a მანძილით) დაშორებული პარალელური წრფეებით და შემთხვევით აგდებენ l სიგრძის ($l < a$) ნემსს. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ნემსი გადაკვეთს ერთ-ერთს პარალელური წრფეებიდან.

ამოხსნა. ნემსის მდებარეობა ცალსახად განისაზღვრება მისი ცენტრის დაშორებით x უახლოეს წრფემდე და კუთხით φ, რომელსაც ნემსი ადგენს წრფეთა პერპენდიკულართან. ცხადია, რომ $0 \le x \le a/2$ და $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.

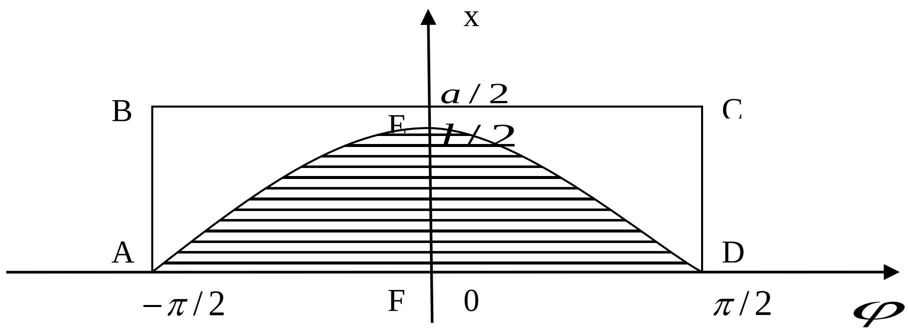


შემოვიღოთ ხდომილება: A={ნემსმა გადაკვეთა ერთ-ერთი წრფე}. ნემსის მიერ ერთ-ერთი წრფის გადაკვეთისას შესრულდება თანაფარდობა $x \le l\cos\varphi/2$.



ამ პირობას აკმაყოფილებს წერტილები, რომელთა (x,φ) კოორდინატები AED დაშტრიხულ არეშია (რომლის სიმაღლეა $EF = l/2$), ხოლო ნემსის ყველა შესაძლო მდგომარეობა ხასიათდება ABCD მართკუთხედით. შესაბამისად, ალბათობის გეომეტრიული განმარტების თანახმად, საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A) = S_{AED} / S_{ABCD} .$$



ცხადია, რომ $S_{ABCD} = a\pi/2$, ხოლო დაშტრიხული არის ფართობის გამოსათვლელად ვისარგებლოთ მრუდწირული ტრაპეციის ფართობის ფორმულით:

$$S_{AED} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{l}{2} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{l}{2} \sin\varphi \,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = l .$$

შესაბამისად, $P(A) = 2l / a\pi$.

აქედან $\pi = 2l / aP(A)$, რაც, თავის მხრივ, საშუალებას გვაძლევს მიახლოებით გამოვთვალოთ π რიცხვის მნიშვნელობა: თუ ნემსს შემთხვევით დავაგდებთ სიბრტყეზე n-ჯერ და ის პარალელურ წრფეებს გადაკვეთავს m-ჯერ, მაშინ საკმაოდ დიდი n-სათვის $P(A) \approx m/n$ და, შესაბამისად, ვღებულობთ π რიცხვის გამოსათვლელ მიახლოებით გამოსახულებას $\pi \approx 2nl / am$.

მაგალითი 4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სიმეტრიული მონეტის ორი დამოუკიდებელი აგდებისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $\Omega=\{$გგ, გს, სგ, სს$\}$; $P\{$გგ$\} = P\{$გს$\} =$ $= P\{$სგ$\} = P\{$სს$\} = 1/4$; $A=\{$გგ, გს, სგ$\}$ და $P(A) = 3/4$.

მაგალითი 5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წესიერ სათამაშო კამათლის სამჯერ გაგორებისას მოსული ქულები ერთი და იგივეა?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება ისეთი დალაგებული (i, j, k) სამეულების ერთობლიობა, სადაც თითოეული კომპონენტი ღებულობს მნიშვნელობებს 1,2,...,6 ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ნამრავლის პრინციპის თანახმად (იხ. თავი II), ასეთი სამეულების რაოდენობა იქნება: $|\Omega| = 6\cdot 6\cdot 6 = 216$. ვინაიდან სათამაშო კამათელი წესიერია, ყველა ელემენტარული ხდომილება ერთნაირად მოსალოდნელია. ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება აღვნიშნოთ A სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $A = \{(1,1,1); (2,2,2); (3,3,3); (4,4,4); (5,5,5); (6,6,6\}$ და ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად ვპოულებთ, რომ საძიებელი ალბათობა იქნება $P(A) = 6/216 = 1/36$.

მაგალითი 6. განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული გოგონა, რომელსაც ჰყავს ორი დედმამიშვილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მას არ ჰყავს და?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება (a,b,c) სამეულების ერთობლიობა, სადაც I ადგილას წერია სამშვილიანი ოჯახის პირველი შვილის სქესი, II ადგილას – მეორე შვილის სქესი და III ადგილას – მესამე შვილის სქესი. ბიჭი აღვნიშნოთ b ასოთი, გოგონა – g ასოთი, ხოლო შერჩეული გოგონა – g^s სიმბოლოთი, მაშინ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega = \{g^s gg, gg^s g, ggg^s, g^s gb, gg^s b, g^s bg, gbg^s, bg^s g, bgg^s, g^s bb, bg^s b, bbg^s\}.$$

შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$P\{\text{არ ჰყავს და}\} = 3/12 = 1/4.$$

მაგალითი 7. 20 სტუდენტიდან ნახევარი ქალია და ნახევარი ვაჟი. მათგან შემთხვევით ირჩევენ სტუდენტთა საბჭოს პრეზი-

დენტსა და ვიცე-პრეზიდენტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ პრეზიდენტი გახდება ქალი, ხოლო ვიცე-პრეზიდენტი – ვაჟი?

ამოხსნა. ცხადია, რომ საქმე გვაქვს განმეორების გარეშე 20 ობიექტიდან 2 ობიექტის შერჩევასთან და როგორც ვიცით ეს შესაძლებელია $20 \cdot 19 = 380$ სხვადასხვანაირად. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება სწორედ ამ 380 ერთნაირად შესაძლებელი ელემენტარული ხდომილებისაგან. ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა კი, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, იქნება $10 \cdot 10 = 100$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება $100/380 = 5/19$.

მაგალითი 8. ტეხასურ ლოტოში თქვენ ირჩევთ ხუთ რიცხვს და კიდევ ერთ ბონუს რიცხვს 1,...,44 რიცხვებიდან. მომგებიანი რიცხვები ირჩევა შემთხვევით (გვაქვს 5 მომგებიანი და 39 წამგებიანი რიცხვი). რა უფრო მოსალოდნელია: თქვენ მოიგებთ პირველი ხუთი რიცხვით ბონუს რიცხვის გარეშე, თუ მოიგებთ პირველი ხუთიდან ოთხი რიცხვითა და ბონუს რიცხვით?

ამოხსნა. 44 ობიექტიდან 5 ობიექტს ვირჩევთ დაბრუნების გარეშე და დალაგებას არ ექცევა ყურადღება. შესაბამისად, გვაქვს C_{44}^{5} კომბინაცია (იხ. თავი II) და თითოეული მათგანისათვის ბონუს რიცხვის არჩევის 44 შესაძლებლობა. ამდენად, სულ ჩვენ გვაქვს $C_{44}^{5} \cdot 44 = 47784352$ ელემენტარული ხდომილება. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A = \{$მოგება პირველი ხუთი რიცხვებით, ბონუს რიცხვის გარეშე$\}$ და $B = \{$მოგება ხუთიდან ოთხი რიცხვითა და ბონუს რიცხვის რიცხვით$\}$. ცხადია, რომ პირველი ხუთი რიცხვი იგებს ერთადერთ შემთხვევაში, ხოლო ბონუს რიცხვის გამორიცხვა ხდება 43 შემთხვევაში, ამიტომ A ხდომილების ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა არის $1 \cdot 43 = 43$. შესაბამისად,

$$P(A) = 43/47784352 \approx 9 \cdot 10^{-7}.$$

მომგებიანი 5 რიცხვიდან 4-ის ამორჩევა შეიძლება $C_5^4 = 5$ სხვადასხვანაირად, ხოლო მეხუთე მომგებიანის გამორიცხვა კი $C_{39}^{1} = 39$ სხვადასხვანაირად. ამასთანავე, B ხდომილებას ხელს

უწყობს ბონუს რიცხვის ერთადერთი ვარიანტი და საბოლოოდ გვაქვს: $|B| = 5 \cdot 39 \cdot 1 = 195$. შესაბამისად,

$$P(B) = 195/47484352 \approx 4 \cdot 10^{-6}.$$

ე. ი. B ხდომილება $4 \cdot 10^{-6}/(9 \cdot 10^{-7}) \approx 4.44$-ჯერ უფრო მოსალოდნელია ვიდრე A.

მაგალითი 9. 52 კარტიდან დაბრუნების გარეშე იღებენ 5 კარტს. **ა)** რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში არ იქნება „გული“; **ბ)** რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში იქნება k „გული“ $(k = 0,1,...,5)$; **გ)** „გულების“ რა რაოდენობაა ყველაზე უფრო მოსალოდნელი?

ამოხსნა. ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა იქნება C_{52}^{5} (დალაგებებს ყურადღებას არ ვაქცევთ). **ა)** შემთხვევაში ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილების მისაღებად 5 კარტის არჩევა უნდა მოხდეს $52 - 13 = 39$ არა „გულიდან“ და რადგან ეს შესაძლებელია C_{39}^{5} სხვადასხვანაირად, ამიტომ ვღებულობთ:

$$P\{\text{არა "გული"}\} = C_{39}^{5} / C_{52}^{5} \approx 0.22;$$

შენიშვნა. საძიებელი ალბათობა არ შეიცვლება თუ დალაგებას გავითვალისწინებთ, მაგრამ უნდა გავითვალისწინოთ როგორც ელემენტარული ხდომილებების საერთო რაოდენობაში, ისე ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობაშიც. ეს აიხსნება იმ გარემოებით, რომ სამართლიანია თანაფარდობა:

$$A_m^k / A_n^k = C_m^k / C_n^k.$$

ბ) შემთხვევაში k „გული“ უნდა აირჩეს გულების საერთო რაოდენობიდან ანუ 13-დან. ეს შესაძლებელია C_{13}^{k} სხვადასხვანაირად. დანარჩენი $5-k$ კარტი უნდა აირჩეს დარჩენილი 39 კარტიდან, რაც შესაძლებელია C_{39}^{5-k} სხვადასხვანაირად. ნამრავლის პრინციპის თანახმად ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $C_{13}^{k} \cdot C_{39}^{5-k}$ და საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$P\{k \text{ "გული"}\} = C_{13}^{k} \cdot C_{39}^{5-k} / C_{52}^{5},\ k = 0,1,...,5.$$

გ) წინა პუნქტში მიღებული გამოსახულების გამოყენებით დავრწმუნდებით, რომ ყველაზე უფრო მოსალოდნელია 1 „გული“ ალბათობით 0.41.

მაგალითი 10 („ბედნიერ“ ბილეთებზე). 25 საგამოცდო ბილეთიდან 5 „ბედნიერია“, ხოლო დანარჩენი 20 – „არა ბედნიერი“. რომელ სტუდენტს აქვს „ბედნიერი“ ბილეთის აღების მეტი ალბათობა: ვინც პირველი იღებს ბილეთს, თუ ვინც მეორე იღებს ბილეთს?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ პირველი სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთის ნომერი i ასოთი, ხოლო მეორე სტუდენტის მიერ აღებული ბილეთის ნომერი j ასოთი. დავუშვათ, რომ „ბედნიერი“ ბილეთების ნომრებია: 1, 2, 3, 4, 5. მაშინ ცხადია, რომ $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1,2,...,25, i \neq j\}$, $|\Omega| = 25 \cdot 24 = 600$ და, ბუნებრივია, ჩავთვალოთ, რომ ყველა ელემენტარული ხდომილება ტოლალბათურია: $P(i, j) = 1/600$.

შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A = \{\text{პირველმა სტუდენტმა აიღო კარგი ბილეთი}\},$$

$$B = \{\text{მეორე სტუდენტმა აიღო კარგი ბილეთი}\},$$

მაშინ ამ ხდომილებებს აქვს შემდეგი სახე:

$$A = \{(i.j) : i = 1,...,5;\ j = 1,...,25; i \neq j\} \text{ და}$$
$$B = \{(i, j) : i = 1,...,25;\ j = 1,...,5; i \neq j\}.$$

ადვილი დასანახია, რომ $|A| = 5 \cdot 24 = 120$, $|B| = 5 \cdot 4 + 20 \cdot 5 = 120$. ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

$$P(A) = P(B) = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}.$$

ე.ი. ორივე სტუდენტს აქვს კარგი ბილეთის აღების ერთი და იგივე ალბათობა.

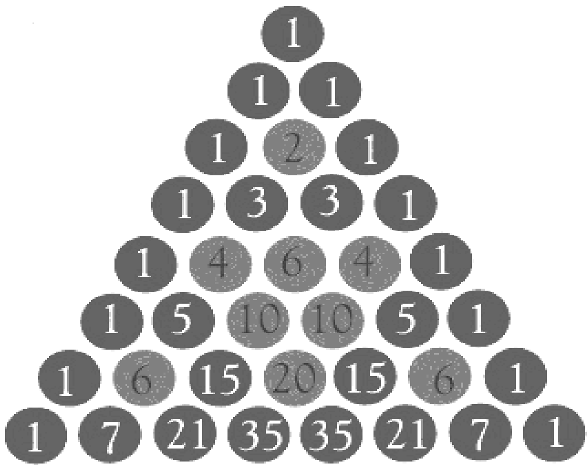
დავალება. წინა ამოცანაში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მესამე სტუდენტი ამოიღებს „ბედნიერ“ ბილეთს.

მაგალითი 11 (გალტონის დაფა). გვაქვს დაფაზე სამკუთხედის ფორმით დალაგებული რგოლები ისე, რომ წვეროში ერთი რგოლია, მეორე რიგში წინასგან თანაბრ მანძილებზე ორი რგოლი, მესამე რიგში ზედა ორი რგოლიდან თანაბარ მანძილებზე სამი რგოლი და ა.შ. ბოლოში არის ექვსი რგოლი. მე-7 რიგში კი არის ბოლო 6 რგოლიდან თანაბარ მანძილებზე 7 ღრმული. ზედა რგოლზე აგდებენ ბურთს და მას შეუძლია იგორაოს თანაბარი ალბათობით ან მარჯვნივ, ან მარცხნივ რგოლიდან რგოლზე, რაც საბოლოოდ სრულდება რომელიმე ღრმულში ჩავარდნით. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ბურთი ჩავარდება მეხუთე ღრმულში?

•
O
O O
O O O
O O O O
O O O O O
O O O O O O
U U U U U U U
1 2 3 4 5 6 7

ამოხსნა. როგორც ვხედავთ არსებობს პირველ და მე-7 ღრმულებში ბურთის ჩავარდნის ერთადერთი გზა (ტრაექტორია), მეორე და მე-6 ღრმულებში ბურთის ჩავარდნის – ექვს-ექვსი გზა, მესამე და მეხუთე ღრმულებში – თხუთმეტ-თხუთმეტი გზა და, ბოლოს, მეოთხე ღრმულში – ბურთის ჩავარდნის 20 გზა. გზების (შედეგების) სრული რაოდენობაა 1+6+15+20+15+6+1=64 და ყველა ეს შედეგი თანაბრად მოსალოდნელია, ვინაიდან თითოეული ტრაექტორიის გავლისას ბურთი განიცდის ექვს დაჯახებას რგოლებზე და ყოველი დაჯახებისას ის თანაბარი ალბათობებით გადაადგილდება ან მარჯვნივ, ან მარცხნივ. თანაბარალბათური 64 შედეგიდან მეხუთე ღრმულში ჩავარდნას ხელს უწყობს 15 შედეგი და, შესაბამისად, საძებნი ალბათობა იქნება 15/64.

ქვემოთ მოყვანილია გალტონის დაფაზე რგოლების 7 რიგის შემთხვევაში თითოეულ პოზიციაზე ბურთის მოხვედრის შესაძლო გზების რიცხვი.



მაგალითი 12. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ წრეში შემთხვევით ჩაგდებული წერტილი არ ჩავარდება ამ წრეში ჩახაზულ წესიერ ექვსკუთხედში.

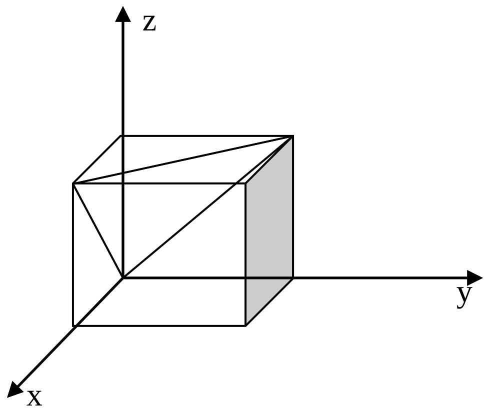
ამოხსნა. დავუშვათ, რომ წრის რადიუსია R, მაშინ მასში ჩახაზული წესიერი ექვსკუთხედის გვერდიც იქნება R. ამასთანავე, წრის ფართობია $|S|=\pi R^2$, ხოლო ექვსკუთხედის ფართობია – $|s|=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P=\frac{|S|-|s|}{|S|}=\frac{\pi R^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}{\pi R^2}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2\pi}\approx 0,174.$$

მაგალითი 13. AB მონაკვეთზე შემთხვევით აგდებენ სამ წერტილს C, D და M. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ AC, AD და AM მონაკვეთებისაგან შეიძლება აიგოს სამკუთხედი?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ AC, AD და AM მონაკვეთების სიგრძეები შესაბამისად x, y და z-ით და ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის როლში განვიხილოთ სივრცის წერტილთა სიმრავლე კოორდინატებით (x, y, z). თუ ჩავთვლით, რომ AB მონაკვეთის სიგრძე ტოლია 1-ის, მაშინ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება კუბი, რომლის წიბოა ერთი. ამავე დროს, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა სიმრავლე (სამკუთხედის აქსიომის თანახმად) შედგება იმ წერტილებისაგან, რომელთა

კოორდინატებისათვის სრულდება სამკუთხედის უტოლობები: $x + y > z$, $x + z > y$, $y + z > x$. ეს კი წარმოადგენს კუბის ნაწილს, რომელიც მოჭრილია მისგან სიბრტყეებით: $x + y = z$, $x + z = y$, $y + z = x$ (ერთ-ერთი ამ სიბრტყიდან, კერძოდ $x + y = z$, მოყვანილია ნახაზზე).



ყოველი ასეთი სიბრტყე კუბიდან მოჭრის პირამიდას, რომლის მოცულობა ტოლია

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}.$$

შესაბამისად, კუბის დარჩენილი ნაწილის მოცულობა იქნება

$$|v|=1-3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა, განმარტების თანახმად, იქნება

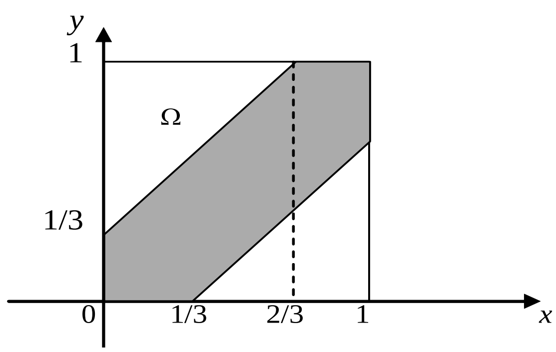
$$|P|=\frac{|v|}{|V|}=\frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}.$$

მაგალითი 14 (შეხვედრის ამოცანა). ორი პირი შეთანხმდა გარკვეულ ადგილზე შეხვდეს ერთმანეთს 6-დან 7 საათამდე. თითოეული მათგანი შემთხვევით მომენტში მიდის დათქმულ ადგილას და მეორეს ელოდება 20 წუთის მანძილზე (შემდეგ კი მიდის). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს პირები შეხვდებიან ერთმანეთს.

ამოხსნა. ავღნიშნოთ, ერთ-ერთი პირის დათქმულ ადგილზე მისვლის დრო $6+x$-ით, ხოლო მეორე პირის – $6+y$-ით (სადაც x და y გამოსახულია საათებში). ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის როლში შეგვიძლია ავიღოთ იმ (x,y) წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც ერთეულოვან კვადრატს ეკუთვნის. ამ შემთხვევაში ჩვენთვის საინტერესო წერტილთა (ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა) სიმრავლე იქნება ერთეულოვანი კვადრატის იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა კოორდინატები ერთმანეთისაგან დაშორებულია არა უმეტეს $20/60=1/3$-ით:

$$A=\{(x,y);|x-y|\le 1/3\}\cap\Omega.$$

ვინაიდან $|x-y|\le 1/3 \Leftrightarrow -1/3\le y-x\le 1/3 \Leftrightarrow x-1/3\le y\le x+1/3$. ამიტომ ადვილი გასაგებია, რომ A სიმრავლე იქნება ერთეულოვანი კვადრატის შიგნით $y=x-1/3$ და $y=x+1/3$ წრფეებს შორის მოქცეული გაფერადებული არე (როცა $0\le x\le 1/3$, მაშინ $y=x-1/3$ წრფის ნაცვლად ქვედა საზღვრის როლში იქნება x ღერძი: $0\le y\le x+1/3$, ხოლო როცა $2/3\le x\le 1$, მაშინ ზედა საზღვარი $y=x+1/3$ წრფის ნაცვლად იქნება $y=1$ წრფე: $x-1/3\le y\le 1$).



ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1-2/3\cdot 2/3}{1}=\frac{5}{9}.$$

თავი II

კომბინატორიკა

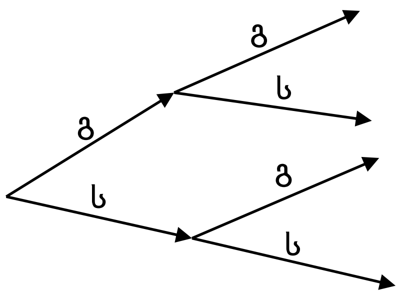
კომბინატორიკის ელემენტები. ალბათობის ამოცანების ამოხსნის პირველ ეტაპზე, უმეტეს შემთხვევაში, აუცილებელია განისაზღვროს როგორც ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ელემენტთა საერთო რაოდენობა, ისე ამა თუ იმ ხდომილების ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა. ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობის გამოსათვლელ ძირითად პრინციპს წარმოადგენს ე.წ. ნამრავლის პრინციპი, რომლის კერძო შემთხვევაში ასე ფორმულირდება:

ნამრავლის პრინციპი: თუ ერთი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n სხვადასხვა გზით და თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია m სხვადასხვა გზით, მაშინ ობიექტთა წყვილის შერჩევა შესაძლებელია nm სხვადასხვა გზით.

მაგალითად, თუ მამაკაცს აქვს 4 პერანგი და 2 პიჯაკი, მაშინ ამ მამაკაცს აქვს პერანგისა და პიჯაკის შერჩევის $4\times2=8$ შესაძლებლობა (ვარიანტი).

ნამრავლის პრინციპთან დაკავშირებით ხშირად სასარგებლოა ხის მსგავსი **(ხისებრი) დიაგრამის** ანუ **დენდროგრამის** გამოყენება.

მაგალითად, დენდროგრამით გამოსახული მონეტის ორჯერ აგდების შესაბამისი შედეგების სიმრავლე იქნება:



მაგალითი 1. რამდენი ელემენტარული ხდომილებისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე თუ ორ კამათელს ვაგორებთ ერთჯერ?

ამოხსნა. პირველი კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე (კამათელის ზედა წახნაგზე შეიძლება გამოჩნდეს ნებისმიერი 6 რიცხვიდან). ამ 6 შესაძლებლობიდან თითოეულისათვის მეორე კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე. ამიტომ ნამრავლის პრინცეპის თანახმად ორი კამათელი შეიძლება დაეცეს $6 \cdot 6 = 36$ სხვადასხვანაირად.

მაგალითი 2. ვაგდებთ ერთ მონეტას და ვაგორებთ ერთ სათამაშო კამათელს. მონეტა შეიძლება დაეცეს 2 სხვადასხვა მხარეზე. ამ ორი შესაძლებლობიდან თითოეულისათვის კამათელი შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე. შესაბამისად, შესაძლო შედეგთა რაოდენობა, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, იქნება $2 \cdot 6 = 12$. ეს შედეგებია: გ1, გ2, . . . ,გ6, ს1, ს2, . . . ,ს6.

მაგალითი 3. ვაგდებთ მონეტას ერთჯერ, თუ მოვიდა გერბი მეორეჯერ ვაგდებთ მონეტას, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში ვაგორებთ სათამაშო კამათელს. მონეტა ისევ შეიძლება დაეცეს 2 სხვადასხვა მხარეზე და კამათელი ასევე შეიძლება დაეცეს 6 წახნაგიდან ნებისმიერზე, მაგრამ აქ დარღვეულია ნამრავის პრინციპის ძირითადი მოთხოვნა, რომ პირველი პროცედურის თითოეული შედეგისათვის მეორე პროცედურის შედეგთა რაოდენობა იყოს უცვლელი (აქ კი მეორე შემთხვევაში გვაქვს ან 2 ან 6 შესაძლებლობა). ამიტომ შესაძლო შედეგთა რაოდენობის ნამრავლის პრინციპით გამოთვლა არ იქნება მართებული. სინამდვილეში აქ მოსალოდნელია 8 სხვადასხვა შედეგი. ეს შედეგებია: გგ, გს, ს1, ს2, . . . ,ს6.

ნამრავლის პრინციპი ზოგადად ასე ყალიბდება: თუ ერთი ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_1 სხვადასხვა გზით, თითოეული ამ შესაძლებლობისათვის მეორე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_2 სხვადასხვა გზით, თითოეულისათვის პირველი ორი შესაძლებლობიდან მესამე ობიექტის შერჩევა შესაძლებელია n_3 სხვადასხვა გზით და ა. შ., მაშინ ობიექტთა m-ეულის (ამ პროცედურის m-ჯერ გამეორების შედეგად) შერჩევა შესაძლებელია $n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$ სხვადასხვა გზით.

მაგალითი 4. წვნიანის, ბუტერბროდის, დესერტისა და წვენისაგან შემდგარი საუზმის რამდენი სხვადსხვა კომბინაციის შეთავაზება შეიძლება მომხმარებლისათვის, თუ შერჩევა შესაძლებელია 4 სახეობის წვნიანისა, 3 სახეობის ბუტერბროდისა, 5 სახეობის დესერტისა და 4 სახეობის წვენისაგან?

ამოხსნა. საუზმის ყველა შესაძლო ვარიანტების რაოდენობა, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, იქნება: $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 240$.

მაგალითი 5. რამდენი ლუწი სამნიშნა რიცხვის შედგენა შეიძლება ციფრების 1, 2, 5, 6 და 9 საშუალებით, თუ თითოეული გამოყენებული იქნება მხოლოდ ერთჯერ?

ამოხსნა. ვინაიდან რიცხვი უნდა იყოს ლუწი, ჩვენ გვაქვს ერთეულის არჩევის მხოლოდ ორი შესაძლებლობა. თითოეული არჩეული ერთეულისათვის ჩვენ შეგვიძლია ასეულების ციფრი შევარჩიოთ 4 სხვადსხვა გზით და ერთეულისა და ასეულის არჩევის შემდეგ ათასეულების ციფრი შეგვიძლია შევარჩიოთ 3 სხვადასხვა გზით. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ სხვადსხვა ლუწი სამნიშნა რიცხვი.

გადანაცვლებები – ეს არის კომბინაციები, რომლებიც შედგენილია მოცემული n ელემენტიანი სიმრავლის ყველა n ელემენტისაგან და ერთამანეთისაგან განხსვავდება მხოლოდ ელემენტების განლაგების რიგით. $P_n = n!$.

წყობები – ეს არის m ელემენტიანი კომბინაციები n განსხვავებული ელემენტის მქონე სიმრავლიდან, რომელებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება ან ელემენტების შემადგენლობით ან ელემენტების განლაგების რიგით. $A_n^m = n!/(n-m)!$.

ჯუფდებები – ეს არის n ელემენტიანი სიმრავლის დაულაგებელი m ელემენტიანი ქვესიმრავლეები. $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$. ცხადია, რომ $C_n^m \cdot m! = A_n^m$.

მაგალითი 6. რამდეგი განსხვავებული სია შეიძლება შედგენილ იქნეს 7 სხვადასხვა გვარისაგან?

ამოხსნა. $P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

მაგალითი 7. შეჯიბრებაში მონაწილე 10 სპორტსმენიდან პირველ სამ ადგილზე გასული სამი გამარჯვებული რამდენ

სხვადასხვანაირად შეიძლება განთავსდეს დასაჯილდოებელ კვარცხლბეკზე?

ამოხსნა. $A_{10}^{3}=10\cdot 9\cdot 8=720.$

მაგალითი 8. შესარჩევ შეჯიბრებაში მონაწილეობს 10 ადამიანი, რომელთაგან ფინალში გადის სამი. ფინალისტების რამდენი განსხვავებული სამეული შეიძლება გამოვლინდეს?

ამოხსნა. წინა მაგალითისაგან განსხვავებით, აქ ფინალისტების რიგს (დალაგებას) მნიშვნელობა არა აქვს. ამიტომ ვიყენებთ ჯუფდების ფორმულას:

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{6}=120.$$

მაგალითი 9. 20 ლატარიის ბილეთიდან იღებენ ორს I და II პრიზის მოსაგებად. რამდენი ელემენტისაგან შედგება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება

$$A_{20}^{2}=\frac{20!}{(20-2)!}=\frac{20!}{18!}=20\cdot 19=380.$$

მაგალითი 10. იპოვეთ 6 განსხვავებულციფრიანი ტელეფონის ნომრების რიცხვი, თუ ნებისმიერ ადგილას შესაძლებელია ეწეროს ნებისმიერი ციფრი.

ამოხსნა. $A_{10}^{6}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=151200.$

მაგალითი 11. რამდენი გზით შეიძლება მათემატიკური საზოგადოების პრეზიდიუმის 5 წევრიდან სამი სხვადასხვა მომხსენებლის შერჩევა მათემატიკური საზოგადოების სამი სხვადასხვა შეხვედრისათვის?

ამოხსნა. კომბინაციათა რაოდენობა იქნება

$$A_{5}^{3}=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=5\cdot 4\cdot 3=60.$$

მაგალითი 12. ვიპოვოთ 4 სტუდენტისა და 3 პროფესორისაგან შედგენილ შესაძლო დელეგაციათა რაოდენობა, რომელიც შედგება 2 სტუდენტისა და 1 პროფესორისაგან.

ამოხსნა. 4 სტუდენტისაგან 2 სტუდენტის შერჩევა შეიძლება $C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ სხვადასახვა გზით, ხოლო 3 პროფესორისაგან 1 პროფესორის შერჩევა შეიძლება $C_3^1 = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$ სხვადასხვანაირად. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ყველა შესაძლო დელეგაციათა რაოდენობა იქნება $C_4^2 \cdot C_3^1 = 6 \cdot 3 = 18$.

მაგალითი 13. რამდენნაირად შეიძლება 6 სახეობის ასაფეთქებელი ნივთიერება დავალაგოთ გრძელ თაროზე, თუ ცნობილია, რომ ორი მათგანი არ შეიძლება ერთმანეთის გვერდით დაიდოს?

ამოხსნა. ამ ორი ასაფეთქებელი ნივთიერებიდან ერთ-ერთი გადავდოთ ცალკე და დანარჩენი 5 დავალაგოთ თაროზე. 5 ნივთიერების თაროზე დალაგება შესაძლებელია 5! სხვადასხვანაირად. მას შემდეგ რაც თაროზე დალაგებულია 5 ნივთიერება მე-6 ნივთიერება ვერ დაიდება ერთ-ერთი მათგანის გვერდზე (არც მარჯვნივ და არც მარცხნივ), შესაბამისად, მე-6 ნივთიერება შესაძლებელია დაიდოს $6-2=4$ ადგილას. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, საძიებელი რაოდენობა იქნება: $5! \times 4 = 480$.

მაგალითი 14. განვიხილოთ მართკუთხოვანი $m \times n$ ბადე, რომელიც შედგება 1×1 კვადრატებისაგან. ვიპოვოთ იმ უმოკლესი გზების რაოდენობა, რომელსაც მივყავართ მარცხენა ქვედა კუთხიდან – წერტილიდან (0,0) მარჯვენა ზედა კუთხეში – წერტილში (m,n).

ამოხსნა. უმოკლესი გზა (0,0) წერტილიდან (m,n) წერტილში შედგება $m+n$ მონაკვეთისაგან, რომელთა შორის m ჰორიზონტალურია და n კი ვერტიკალური. სხვადასხვა გზა განსხვავდება მხოლოდ ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მონაკვეთების მონაცვლეობის რიგით. ამიტომ გზების საერთო რაოდენობა ემთხვევა იმ შესაძლებლობების რაოდენობას რამდენნაირადაც $m+n$ მონაკვეთისაგან შესაძლებელია შეირჩეს m ჰორიზონტალური მონაკვეთი, ანუ C_{m+n}^m (შეიძლებოდა განგვეხილა იმ შესაძლებლობების რაოდენობა რამდენნაირადაც შესაძლებელია შეირჩეს არა m ჰორიზონტალური მონაკვეთი, არამედ n ვერტიკალური მონაკვეთი და, მაშინ, პასუხი იქნებოდა C_{m+n}^n. ამით, ფაქტობრივად, გეომეტრიულად შევამოწმეთ, რომ $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$).

წრიული გადანაცვლებები – გადანაცვლებებს, რომელსაც ადგილი აქვს ობიექტების წრეწირზე დალაგებისას (განთავსებისას) ეწოდება წრიული გადანაცვლებები. განსხვავებით სწორ ხაზზე განლაგებისაგან, ორი წრიული გადანაცვლება არ ითვლება განსხვავებულად თუ ამ განლაგებებში ნებისმიერი ობიექტის წინა და მომდევნო ობიექტები უცვლელია (ამ შემთხვევაში არ არსებობს პირველი და ბოლო პოზიცია). მაგალითად, თუ ოთხი ადამიანი თამაშობს ბრიჯს, ჩვენ არ გვაქვს ახალი გადანაცვლება თუკი ყველას გადავაადგილებთ ერთი (ან რამდენიმე) პოზიციით საათის ისრის მოძრაობის (ან მოძრაობის საწინააღმდეგო) მიმართულებით. თუ განვიხილავთ ერთ მოთამაშეს ფიქსირებულ პოზიციაზე და დანარჩენ სამს დავალაგებთ ნებისმიერად, რაც შესაძლებელია 3! სხვადასხვანაირად, დავინახავთ, რომ ბრიჯის თამაშის დროს შესაძლებელია მოთამაშეების 3! სხვადსახვანაირად განთავსება.

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: წრეწირზე განლაგებული n განსხვავებული ობიექტის ყველა შესაძლო გადანაცვლებათა რაოდენობა ტოლია $(n-1)!$-ის.

გარდა ამისა, თუ სწორხაზოვან n ადგილზე $m\,(m \le n)$ ობიექტის განთავსება შეიძლება A_n^m სხვადასხვანაირად, წრეწირზე განლაგებულ n ადგილზე m ობიექტის განთავსება შეიძლება უკვე A_n^m/m სხვადასხვანაირად (კერძო შემთხვევაში, როცა $n=m$ ვღებულობთ წრიულ გადანაცვლებათა რაოდენობას:

$$A_n^n/n = P_n/n = n!/n = (n-1)!).$$

აქამდე ჩვენ ვიხილავდით განსხვავებული ობიექტების გადანაცვლებებს. ცხადია, რომ თუ ავიღებთ ლათინური ანბანის სამ ასოს a, b და c-ს, მაშინ მათი განსხვავებული 3! = 6 გადანაცვლებებია: abc; acb; bac; bca; cab და cba. მაგრამ, თუ ამ სამი ასოდან b და c ერთი და იგივე x-ია, მაშინ axx; axx; xax; xxa; xax; xxa გადანაცვლებებიდან, მხოლოდ 3 (axx; xax; xxa) იქნება განსხვავებული (3=3!/2!). ოთხი განსხვავებული a, b, c და d ასოს შემთხვევაში გადანაცვლებათა რაოდენობაა 4! = 24, მაგრამ თუ მაგალითად, $a=b=x$ და $c=d=y$, მაშინ ჩვენ გვექნება მხოლოდ 4!/(2! 2!)=6 განსხვავებული გადანაცვლება: $xxyy$; $xyxy$; $yxxy$; $yyxx$; $xyyx$ და $yxyx$.

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: იმ n ობიექტის განსხვავებულ გადანაცვლებათა რაოდენობა, რომელთა შორის n_1 პირველი ტიპისაა, n_2 მეორე ტიპისაა, და ა. შ. n_k – k-ური ტიპისაა, შეადგენს:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \qquad (\text{ცხადია, რომ } P_n^{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-\text{ჯერ}}} = P_n).$$

მართლაც, როგორც ცნობილია, ყველა ობიექტი განსხვავებული რომ ყოფილიყო, მაშინ გადანაცვლებათა რაოდენობა იქნებოდა $n!$. მათ შორის ერთი და იგივე იქნება: 1) ის n-ეულები, სადაც კონკრეტულ n_1 ადგილას დგას პირველი ტიპის ობიექტები და მათი რაოდენობა შეადგენს $n_1!$-ს; 2) ის n-ეულები, სადაც კონკრეტულ n_2 ადგილას დგას მეორე ტიპის ობიექტები და მათი რაოდენობა შეადგენს $n_2!$-ს; და ა. შ. k) ის n-ეულები, სადაც კონკრეტულ n_k ადგილას დგას k-ური ტიპის ობიექტები და მათი რაოდენობა შეადგენს $n_k!$-ს. შესაბამისად, საძიებელ რაოდენობას მივიღებთ, თუ $n!$-ს შევამცირებთ $n_1!n_2!\cdots n_k!$-ჯერ, ანუ განსხვავებულ გადანაცვლებათა რაოდენობა იქნება $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

მაგალითი 15. რამდენაირად შეიძლება 3 წითელი, 4 ყვითელი და 2 ლურჯი ნათურა განვათავსოთ საახალწლო ნაძვის ხის გამნათებელ მოწყობილობაში, რომელსაც ნათურის 9 ბუდე გააჩნია?

ამოხსნა. განსხვავებულ განლაგებათა რაოდენობა იქნება

$$\frac{9!}{3!\cdot 4!\cdot 2!} = 1260.$$

სიმრავლის დაყოფა – ზოგჯერ საჭირო ხდება n ობიექტისაგან შემდგარი სიმრავლის m ქვესიმრავლედ შესაძლო დაყოფათა რიცხვის გამოთვლა. სიმრავლის დაყოფა ეწოდება მის ქვესიმრავლეთა ისეთ ერთობლიობას, რომელთა გაერთიანება მოცემული სიმრავლის ტოლია, ხოლო ამ ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი წყვილი უთავსებადია. თითოეულ ქვესიმრავლეში ელემენტთა დალაგებას მნიშვნელობა არა აქვს. განვიხილოთ სიმრავლე {ა, ე, ი, ო, უ}. ამ სიმრავლის შესაძლო დაყოფები ორ ნაწილად,

რომელთაგან პირველი შეიცავს 4 ელემენტს, ხოლო მეორე კი 1 ელემენტს, შემდეგია: {(ა, ე, ი, ო), (უ)}; {(ე, ი, ო, უ), (ა)}; {(ი, ო, უ, ა), (ე)}; {(ო, უ, ა, ე), (ი)}; {(ა, ე, ი, უ), (ო)}. ასეთ დაყოფათა რაოდენობა აღინიშნება სიმბოლოთი $C_5^{4,1}$, სადაც ქვედა რიცხვი 5 გვიჩვენებს დასაყოფი სიმრავლის ელემენტთა მთლიან რაოდენობას, ხოლო ზედა რიცხვები 4 და 1 კი თუ რამდენ ელემენტიან ქვესიმრავლეებად ვყოფთ მოცემულ სიმრავლეს, ამასთანავე:

$$C_5^{4,1} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5.$$

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულება: n ობიექტისაგან შემდგარი სიმრავლის m ნაწილად შესაძლო დაყოფათა რაოდენობა, სადაც პირველი ნაწილი შეიცავს n_1 ელემენტს, მეორე ნაწილი – n_2 ელემენტს და ა. შ. m-ური ნაწილი – n_m ელემენტს აღინიშნება სიმბოლოთი $C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ და ტოლია:

$$C_n^{n_1,n_2,\ldots n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!},$$

სადაც $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ (ცხადია, რომ $C_n^{m,n-m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$).

მართლაც, მოვიქცეთ შემდეგნაირად: ავიღოთ ნებისმიერი n_1-ელემენტიანი ქვესიმრავლე n**-ელემენტიანი** სიმრავლის (ამის გაკეთება შეიძლება $C_n^{n_1}$ სხვადასხვანაირად), დარჩენილი $n - n_1$ ობიექტიდან ავიღოთ n_2-ელემენტიანი სიმრავლე (ამის გაკეთება შეიძლება $C_{n-n_1}^{n_2}$ სხვადასხვანაირად) და ა. შ. ნამრავლის პრინციპის თანახმად n ობიექტისაგან შემდგარი სიმრავლის m ნაწილად შესაძლო დაყოფათა საერთო რაოდენობა იქნება:

$$C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-\cdots-n_{m-1}}^{n_m} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \times$$

$$\times \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{m-1})!}{n_m!(n-n_1-\cdots-n_m)!} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}.$$

მაგალითი 16. რამდენ სხვადასხვანაირად შეიძლება გადანაწილდეს 7 მეცნიერი სასტუმროს ერთ 3 ადგილიანსა და ორ 2 ადგილიან ნომრებში?

ამოხსნა. შესაძლო გადანაწილებათა რაოდენობა იქნება

$$C_7^{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210.$$

პოლინომიალური ფორმულა. განვიხილოთ ამოცანა იმის შესახებ თუ როგორ გავხსნათ ფრჩხილები $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$ გამოსახულების გამოსთვლელად. სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{r_1 \geq 0, \ldots, r_k \geq 0, r_1 + \cdots + r_k = n} \frac{n!}{r_1! \cdots r_k!} a_1^{r_1} \cdots a_k^{r_k} .$$

დამტკიცება. გადავამრავლოთ n-ჯერ თავის თავზე $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$. მაშინ მივიღებთ k^n შესაკრებს $d_1 d_2 \cdots d_n$ სახის, სადაც თითოეული თანამამრავლი d_i, $i = 1,2,..., n$, არის ან a_1, ან a_2, და ა. შ. ან a_k. აღვნიშნოთ $B(r_1,..., r_k)$ სიმბოლოთი იმ შესაკრებების ერთობლიობა, სადაც a_1 გვხვდება თანამამრავლად r_1-ჯერ, a_2 – r_2-ჯერ , და ა. შ. a_k – r_k-ჯერ. გასაგებია, რომ ასეთი შესაკრებების რაოდენობა ტოლია $\frac{n!}{r_1! \cdots r_k!}$-ის, ხოლო შესაბამისი შესაკრები კი იქნება $\frac{n!}{r_1! \cdots r_k!} a_1^{r_1} \cdots a_k^{r_k}$.

ჯუფდება განმეორებებით. n ელემენტიდან m ელემენტიანი ჯუფდებები განმეორებებით ეწოდება ჯგუფებს, რომლებიც შედგება m ელემენტისაგან, რომელთაგან თითოეული ელემენტი მიეკუთვნება ერთ-ერთს n ტიპიდან.

მაგალითად, სამი a, b და c ელემენტიდან შესაძლებელია შევადგინოთ შემდეგი ორელემენტიანი ჯუფდებები განმეორებებით:

$$aa, bb, cc, ab, ac, bc .$$

სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა: რაოდენობა n ელემენტიდან m ელემენტიანი ჯუფდებების განმეორებებით ტოლია $f_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m$.

მართლაც, ნებისმიერი ჯუფდება ცალსახად განისაზღვრება თუ მივუთითებთ ყოველი n ტიპიდან რამდენი ელემენტი შედის მასში. ყოველ ჯუფდებას შევუსაბამოთ ნულებისა და ერთების მიმდევრობა, რომელიც შედგენილია შემდეგი წესით: დავწეროთ ერთმანეთის გვერდით იმდენი ერთიანი რამდენი პირველი ტიპის ელემენტიც შედის ჯუფდებაში, შემდეგ დავწეროთ ნული და მის შემდეგ იმდენი ერთიანი რამდენი მეორე ტიპის ელემენტიც შედის ჯუფდებაში და ა. შ. (მაგალითად, ზევით დაწერილ ჯუფდებებს სამი ასოდან ორ-ორად შეესაბამება შესაბამისად შემდეგი მიმდევრობები: 1100, 0110, 0011, 1010, 1001, 0101). ამრიგად, n ელემენტიდან ნებისმიერ m ელემენტიან ჯუფდებას განმეორებებით შეესაბამება მიმდევრობა შედგენილი m ერთიანისაგან და $n-1$ ნულისაგან და პირიქით. შესაბამისად, საძიებელი რაოდენობა იქნება $f_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m}$.

მაგალითი 17. ვიპოვოთ რაოდენობა იმ ვარიანტების რამდენნაირადაც შესაძლებელია ამოვარჩიოთ 3 ასო შემდეგი 12 ასოდან: ა, ა, ა, გ, გ, გ, ტ, ტ, ტ, ც, ც, ც.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $n=4$, ხოლო $m=3$. ამიტომ საძიებელი რაოდენობა იქნება: $f_4^3 = C_{4+3-1}^3 = 20$.

მაგალითი 18. დომინოს ქვები შეიძლება განვიხილოთ როგორც 7 რიცხვიდან (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) ორ ელემენტიანი ჯუფდებები განმეორებებით. ამიტომ ამ ჯუფდებათა რაოდენობა არის $f_7^2 = C_{7+2-1}^2 = 28$.

მაგალითი 19. ვიპოვოთ $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ განტოლების მთელ არაუარყოფით ამონახსნთა რაოდენობა.

ამოხსნა. არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა აღნიშნული განტოლების ამონახსნებსა და n ელემენტიდან m ელემენტიან განმეორებებით ჯუფდებებს შორის. თუ გვაქვს მთელი არაუარყოფითი რიცხვები $x_1, x_2, ..., x_m$, ისეთი, რომ $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, მაშინ შეგვიძლია შევადგინოთ m ელემენტიანი ჯუფდება, თუ ავიღებთ პირველი ტიპის x_1 ელემენტს, მეორე ტიპის – x_2 ელემენტს, და ა. შ. მე-m ტიპის – x_m ელემენტს.

პირიქით, თუ გვექნება n ელემენტიდან m ელემენტიანი ჯუფდება, ჩვენ მივიღებთ საწყისი განტოლების გარკვეულ ამონახსნს მთელ არაუარყოფით რიცხვებში. ამიტომ მთელ არაუარყოფით ამონახსნთა რაოდენობა იქნება $f_n^m = C_{n+m-1}^m$.

მაგალითი 20. ვიპოვოთ m ცვლადის უსასრულოდ წარმოებადი ფუნქციის n რიგის განსხვავებულ კერძო წარმოებულთა რაოდენობა. n რიგის კერძო წარმოებული არაა დამოკიდებული გაწარმოების რიგზე, ის დამოკიდებულია მხოლოდ იმაზე თუ რამდენჯერ ხდება გაწარმოება თითოეული ცვლადით. ამიტომ n რიგის განსხვავებულ კერძო წარმოებულთა რაოდენობა ტოლი იქნება $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ განტოლების მთელ არაუარყოფით ამონახსნთა რაოდენობის, ე. ი. $f_n^m = C_{n+m-1}^m$-ის.

ალბათობის გამოთვლა კომბინატორიკის გამოყენებით.

ამორჩევა დაბრუნებით: ექსპერიმენტის ყოველ ნაბიჯზე ყუთიდან ამოღებული ბურთი უკან ბრუნდება. ვიგულისხმოთ, რომ ბურთები გადანომრილია რიცხვებით 1-დან M -მდე. განასხვავებენ ორი ტიპის ამორჩევებს: **დალაგებული ამორჩევები** და **დაულაგებელი ამორჩევები.** დალაგებული ამორჩევები აღინიშნება სიმბოლოთი $(a_1,..., a_n)$, ხოლო დაულაგებელი ამორჩევები – $[a_1,..., a_n]$.

დაბრუნებით დალაგებული ამორჩევის შემთხვევაში:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1,..., a_n) : a_i = 1,..., M; i = 1,..., n\} \text{ და } |\Omega| = M^n .$$

დაულაგებელი ამორჩევები დაბრუნებით:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1,..., a_n] : a_i = 1,..., M; i = 1,..., n\},\ |\Omega| = C_{M+n-1}^n .$$

ამორჩევა დაბრუნების გარეშე: $n \le M$ და ამოღებული ბურთი უკან არ ბრუნდება.

დაბრუნების გარეშე დალაგებული შერჩევის შემთხვევაში:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1,..., a_n) : a_k \ne a_l,\ k \ne l;\ a_i = 1,..., M; i = 1,..., n\} \text{ და } |\Omega| = A_M^n .$$

დაულაგებელი ამორჩევები დაბრუნების გარეშე:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1,..., a_n] : a_k \ne a_l,\ k \ne l;\ a_i = 1,..., M; i = 1,..., n\},\ |\Omega| = C_M^n$$

საბოლოო სურათი ასეთია:

	დალაგებული	დაულაგებელი
დაბრუნებით	M^n	C_{M+n-1}^n
დაბრუნების გარეშე	A_M^n	C_M^n

მაგალითად, $M=3$ და $n=2$-ის შემთხვევაში შესაბამის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეებს ექნებათ შემდეგი სახის სტრუქტურები:

			შერჩევა
	(1,1)(1,2)(1,3) (2,1)(2,2)(2,3) (3,1)(3,2)(3,3)	[1,1][2,2][3,3] [1,2][1,3][2,3]	დაბრუნებით
	(1,2)(1,3) (2,1)(2,3) (3,1)(3,2)	[1,2] [1,3] [2,3]	დაბრუნების გარეშე
ერთობლიობა	დალაგებული	დაულაგებელი	

სავარჯიშოები:

I. კურსზე, რომელზეც სამი ჯგუფია, ჯგუფხელების არჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტების რიცხვია $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$, სადაც n_i – i-ურ ჯგუფში სტუდენტების რაოდენობაა (ვიყენებთ ნამრავლის პრინციპს);

II. რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია m მგზავრი განვათავსოთ n ვაგონში, ტოლია n^m (დალაგებული ამორჩევა დაბრუნებით, სადაც $M=n$ და $n=m$);

III. m ადამიანის დაბადების დღეების ყველა შესაძლო კომბინაცია (იმ პირობით, რომ თითეული დაბადების დღე არის რომელიმე 365 დღიდან) ტოლია 365^m (საქმე გვაქვს ამორჩევასთან დაბრუნებით, ამასთანავე ამორჩევები ითვლება დალაგებულად, სადაც $M=365$ და $n=m$);

IV. რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია 5 ბურთი განვათავსოთ 5 ყუთში, ისე რომ

ერთ ყუთში იყოს ერთი ბურთი, ტოლია 5! (ნამრავლის პრინციპის თანახმად);

V. პარტიების რაოდენობა, რომელიც უნდა შედგეს n მონაწილისაგან შემდგარ წრიულ საჭადრაკო ტურნირში ტოლია $C_n^2 = n(n-1)/2$ (დაულაგებელი ამორჩევა დაბრუნების გარეშე).

მაგალითი 21. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მონეტის 6-ჯერ აგედბისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ A-თი ხდომილება, რომ მონეტის 6-ჯერ აგდებისას ერთჯერ მაინც მოვა გერბი. ვინაიდან მონეტის ყოველი აგდება შეიძლება დასრულდეს ორი სხვადასხვა შედეგით დამოუკიდებლად სხვა აგდებების შედეგებისაგან. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება $2^6 = 64$ ელემენტარული ხდომილებისაგან. ამ შემთხვევაში უფრო მოხერხებულია საწინააღმდეგო $\overline{A}$ ხდომილებაზე გადასვლა, რომელიც ნიშნავს, რომ მონეტის 6-ჯერ აგდებისას არც ერთჯერ არ მოვიდა გერბი. ეს შეიძლება მოხდეს მხოლოდ ერთ შემთხვევაში – თუ ექვსივეჯერ მოვიდა საფასური. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 1/64$. ამიტომ

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1/64 = 63/64.$$

მაგალითი 22. 15 დეტალისაგან შემდგარი პარტიის შესამოწმებლად, რომელთა შორის 5 უვარგისია, შემთხვევით არჩევენ სამ დეტალს. დეტალების პარტია ითვლება უვარგისად თუ უვარგისი აღმოჩნდება ერთი დეტალი მაინც. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ პარტია იქნება უვარგისი.

ამოხსნა. პირველი დეტალის შერჩევა შესაძლებელია 15 სხვადასხვანაირად, მეორე დეტალის შერჩევა შესაძლებელია 14 სხვადასხვანაირად და მესამე დეტალის შერჩევა შესაძლებელია 13 სხვადასხვანაირად. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ყველა შესაძლო სამეულთა რაოდენობა იქნება $15 \cdot 14 \cdot 13$. გადავიდეთ ჩვენთვის საინტერესო A ხდომილების საწინააღმდეგო ხდომილებაზე: $\overline{A}$ – ამორჩეულ სამ დეტალში სამივე იქნება ვარგისი. ასეთი სამეულის არჩევა უნდა მოხდეს 10 ვარგისი დეტალიდან და, წინა მსჯელობის ანალოგიურად, $\overline{A}$-ის ხელშემ-

წყობ სამეულთა რაოდენობა იქნება $10 \cdot 9 \cdot 8$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{67}{91}.$$

მაგალითი 23. კონფერენციის 20 მონაწილისათვის, რომელთა შორის 12 თბილისელია, სასტუმროში დაჯავშნულია 20 ნომერი. ამ ნომრებიდან 12 გადაჰყურებს ზღვას. ადმინისტრატორი შემთხვევით აწვდის კონფერენციის მონაწილეებს ნომრების გასაღებებს. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ 12 თბილისელს შეხვდება ის ნომრები, რომლებიც ზღვას გადაჰყურებს.

ამოხსნა. კონფერენციის 20 მონაწილისათვის 20 სხვადასხვა ნომრის მიცემა იმდენნაირად შეიძლება, რამდენნაირადაც 20 ობიექტი შეიძლება განთავსდეს 20 ადგილას, ანუ $|\Omega| = 20!$. ანალოგიურად, 12 ნომერში 12 თბილისელის განთავსება შესაძლებელია 12! სხვადასხვანაირად, ხოლო დარჩენილ 8 ნომერში კონფერენციის დანარჩენი 8 მონაწილის განთავსება შესაძლებელია 8! სხვადასხვანაირად, დამოუკიდებლად იმისაგან თუ რომელი თბილისელი ზღვაზე ხედის მქონე რომელ ნომერში მოხვდება. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $|A| = 12! \cdot 8!$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A) = \frac{12! \cdot 8!}{20!} = \frac{8 \cdot 7 \cdots 1}{20 \cdot 19 \cdots 13} \approx 7.9 \cdot 10^{-6}.$$

მაგალითი 24. აგდებენ n ცალ სათამაშო კამათელს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოსულ ქულათა ჯამი იქნება: ა) n; ბ) $n+1$.

ამოხსნა. სათამაშო კამათლის ყოველი აგდება შეიძლება დასრულდეს 6 სხვადასხვა შედეგით ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამიტომ, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება $\underbrace{6 \cdot 6 \cdots 6}_{n-\text{ჯერ}} = 6^n$ სხვადასხვა n-ეულისაგან. ამათგან, ერთადერთი იქნება ისეთი სადაც მოსულ ქულათა ჯამი არის n (კერძოდ, $(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{n-\text{ჯერ}})$). მეორე შემთხვე-

ვაში კი ხელშემწყობი n-ეულებია ისინი, სადაც ერთ ადგილას დგას 2-იანი, ყველა დანარჩენი კი 1-იანებია. შესაბამისად, ასეთ n-ეულთა რაოდენობა ემთხვევა n ადგილიდან ერთი ადგილის შერჩევათა რაოდენობას ანუ n-ს. ამიტომ საძიებელი ალბათობები იქნება: ა) $1/6^n$; ბ) $n/6^n$.

მაგალითი 25. ივ. ჯავახიშვილის სახ. უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი, ილიას უნივერსიტეტის 2 სტუდენტი და წერეთელის უნივერსიტეტის 4 სტუდენტი შემთხვევით ჯდება 3 ვაგონში. თითეული მგზავრის ნებისმიერ ვაგონში მოხვედრის ალბათობები ერთი და იგივეა. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი მოხვდება სხვადახვა ვაგონში (ხდომილება A); ბ) ილიას უნივერსიტეტის 2 სტუდენტი მოხვდება სხვადასხვა ვაგონში (ხდომილება B).

ამოხსნა. ა) ნამრავლის პრინციპის თანახმად $|\Omega|=\underbrace{3\cdot 3\cdots 3}_{9-ჯერ}=3^9$.

ავილოთ სხვადასხვა ვაგონის ნებისმიერი 3 ბილეთი და გავუნაწილოთ ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტს, ამის გაკეთება შესაძლებელია 3! სხვადასხვანაირად. თითოეული ამ ვარიანტისათვის არსებობს დანარჩენი 6 სტუდენტის 3 ვაგონში გადანაწილების 3^6 შესაძლებლობა. ამიტომ $|A|=3!\cdot 3^6$ და, მაშასადამე,

$$P(A)=3!\cdot 3^6/3^9=3!/3^3=2/9.$$

ბ) ილიას უნივერსიტეტის I სტუდენტს შეუძლია აირჩიოს ნებისმიერი 3 ვაგონიდან, მეორე სტუდენტს კი ნებისმიერი დარჩენილი 2 ვაგონიდან და ყოველი ამ კომბინაციისათვის არსებობს დანარჩენი 7 სტუდენტის 3 ვაგონში გადანაწილების 3^7 შესაძლებლობა. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად $|B|=3\cdot 2\cdot 3^7$ და, ამგვარად, $P(B)=3\cdot 2\cdot 3^7/3^9=2/3$.

მაგალითი 25-ის გაგრძელება. ვიგულისხმოთ, რომ თითოეულ ვაგონში არის ზუსტად k ადგილი და ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტს შეუძლია დაიკავოს ნებისმიერი ადგილი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ჯავახიშვილის უნივერსიტეტის 3 სტუდენტი აღმოჩნდება სხვადასხვა ვაგონში.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ბილეთების ნომრების სამეულებისაგან და $|\Omega|=3k(3k-1)(3k-2)$, რაც შეეხება ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებებს, მათი რაოდენობა იქნება უკვე $3k\cdot 2k\cdot k=6k^3$ და, შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია:

$$P_k(A)=\frac{6k^3}{3k(3k-1)(3k-2)}=\frac{2k^2}{(3k-1)(3k-2)}.$$

შენიშვნა. ადვილი დასანახია, რომ ვაგონებში ადგილების რაოდენობის უსასრულოდ გაზრდის შემთხვევაში (ანუ როცა $k\to\infty$), მივიღებთ, რომ საძიებელი ალბათობა უახლოვდება წინა მაგალითის ა) პუნქტში მიღებულ ალბათობას:

$$\lim_{k\to\infty}P_k(A)=\lim_{k\to\infty}\frac{2k^2}{9k^2-9k+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{2}{9-9/k+2/k^2}=\frac{2}{9}.$$

მაგალითი 26. ლატარიის 100 ბილეთიდან 25 მომგებიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ 3 ბილეთის შეძენისას თქვენ დარჩებით მოგების გარეშე (ხდომილება A).

ამოხსნა. განვიხილოთ ამ ამოცანის ამოხსნის ორი გზა, რომლებიც ერთმანეთისაგან განსხვავდება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის განმარტებით.

I ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე განვმარტოთ, როგორც ნაყიდი ბილეთების ნომრების მიმდევრობა. ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ $|\Omega|=A_{100}^3$, ხოლო $|A|=A_{75}^3$ და საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{A_{75}^3}{A_{100}^3}=\frac{75\cdot 74\cdot 73}{100\cdot 99\cdot 98}\approx 0.418.$$

II ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე განვმარტოთ როგორც ნაყიდი ბილეთების ერთობლიობა, სიმრავლე (სამეული). ეს შესაძლებელია რადგან ჩვენ გვაინტერესებს არა როგორი რიგითობით იქნა შეძენილი ბილეთები, არამედ მათში მომგებიანების რაოდენობა. ამ შემთხვევაში გასაგებია, რომ $|\Omega|=C_{100}^3$ და $|A|=C_{75}^3$, ხოლო საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=\frac{C_{75}^{3}}{C_{100}^{3}}=\frac{75\cdot 74\cdot 73}{100\cdot 99\cdot 98}\approx 0.418\,.$$

მაგალითი 27. დავუშვათ, რომ ლატარეაში თამაშდება 6 მომგებიანი ნომერი 49-დან. მომგებიანი ნომრების ამოღების რიგს მნიშვნელობა არა აქვს. ლატარეაში მონაწილე ირჩევს 6 ნომერს 49-დან. ვიპოვოთ 4 მომგებიანი ნომრის გამოცნობის ალბათობა (ხდომილება A).

ამოხსნა. ელემენტარული ხდომილება იქნება 6 ნომრის ერთობლიობა 49-დან. ასეთი 6 ნომრიანი ერთობლიობების რაოდენობა ემთხვევა 49 ელემენტიანი სიმრავლის 6 ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობას, ანუ $|\Omega|=C_{49}^{6}$. ლატარეის გათამაშების შემდეგ გათამაშებაში მონაწილე 49 ნომერი იყოფა ორ ჯგუფად: 6 მომგებიანი ნომერი და 43 არამომგებიანი ნომერი. 6 მომგებიანი ნომრიდან 4 მომგებიანი ნომრის შერჩევა შესაძლებელია C_{6}^{4} სხვადასხვანაირად და თითოეული ამ ვარიანტისათვის არსებობს დანარჩენი 2 არამომგებიანი ნომრის არჩევის C_{43}^{2} შესაძლებლობა. შესაბამისად, ნამრავლის პრინციპის თანახმად, ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება $|A|=C_{6}^{4}\cdot C_{43}^{2}$. ამიტომ საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$P(A)=C_{6}^{4}\cdot C_{43}^{2}/C_{49}^{6}\approx 9.7\cdot 10^{-4}\,.$$

მაგალითი 28 (დამთხვევებზე). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) m შემთხვევით არჩეული ადამიანის დაბადების დღეები არ დაემთხვევა ერთმანეთს (იმ პირობით, რომ ყველა დღე ტოლალბათურია); ბ) m შემთხვევით არჩეულ ადამიანში მოიძებნება ორი მაინც ისეთი, რომელთა დაბადების დღეები დაემთხვევა ერთმანეთს.

ამოხსნა. ა) ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შეესაბამება დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნებით, სადაც $M=365$ და $n=m$, ანუ $|\Omega|=365^{m}$; ხოლო ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები კი დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნების გარეშე, სადაც აგრეთვე $M=365$ და $n=m$, ამიტომ მათი რაოდენობაა – A_{365}^{m}. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად, გვაქვს:

$$P(m)=\frac{A_{365}^{m}}{365^{m}}=(1-\frac{1}{365})(1-\frac{2}{365})\cdots(1-\frac{m-1}{365})\,.$$

ბ) საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობის გამოთვლის წესის თანახმად კი გვაქვს, რომ

$$Q(m)=1-\frac{A_{365}^{m}}{365^{m}}\,.$$

მოვიყვანოთ ამ ალბათობის მნიშვნელობების ცხრილი ზოგიერთი m-ის შემთხვევაში:

m	4	16	22	23	40	64	70
Q(m)	0.01636	0.28360	0.47569	0.50730	0.89123	0.99711	0.99916

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ (მოლოდინის საწინააღმდეგოდ!) კლასის მოსწავლეთა რაოდენობა, რომელშიც 1/2-ის ტოლი ალბათობით მოიძებნება ორი მოსწავლე მაინც ერთი და იგივე დაბადების დღეებით, არც ისე დიდია: იგი ტოლია მხოლოდ 23-ის.

მაგალითი 29 (მოგება ლატარეაში). გვაქვს M ბილეთი გადანომრილი რიცხვებით ერთიდან M-მდე, რომელთაგან n ბილეთი ნომრებით ერთიდან n-მდე მომგებიანია ($M\ge 2n$). ვყიდულობთ n ცალ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ n ბილეთიდან ერთი მაინც იქნება მომგებიანი (ავღნიშნოთ ეს ხდომილება A ასოთი)?

ამოხსნა. ვინაიდან ბილეთების ამოღების (ყიდვის) თანმიმდევრობას არა აქვს მნიშვნელობა ნაყიდ ბილეთებში მომგებიანი ბილეთების არსებობის ან არ არსებობის თვალსაზრისით, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეს ექნება შემდეგი სტუქტურა:

$$\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,...,a_n]: a_k\ne a_l,\, k\ne l;\, a_i=1,...,M\}\,.$$

შესაბამისად, ჩვენ მიერ ზემოთ მოყვანილი ცხრილის თანახმად $|\Omega|=C_M^n$.

ხდომილებას (ავღნიშნოთ იგი B_0-ით), რომ ნაყიდ ბილეთებში არ არის მომგებიანი ბილეთები, ექნება შემდეგი სტრუქტურა:

$$B_0=\{\omega:\omega=[a_1,...,a_n]: a_k\ne a_l,\, k\ne l;\, a_i=n+1,...,M\} \text{ და } |B_0|=C_{M-n}^n\,.$$

ამიტომ,

$$P(B_0)=\frac{C_{M-n}^n}{C_M^n}=\frac{A_{M-n}^n}{A_M^n}=(1-\frac{n}{M})(1-\frac{n}{M-1})\cdots(1-\frac{n}{M-n+1})\,.$$

შესაბამისად, საძებნი ალბათობა იქნება:

$$P(B)=1-P(B_0)=1-(1-\frac{n}{M})(1-\frac{n}{M-1})\cdots(1-\frac{n}{M-n+1}).$$

თუ მაგალითად, $M=n^2$ და $n\to\infty$, მაშინ $P(B_0)\to e^{-1}$ (აქ e ნეპერის რიცხვია) და $P(B)\to 1-e^{-1}\approx 0{,}632$, სადაც კრებადობის სიჩქარე საკმაოდ დიდია: უკვე როცა $n=10$, მაშინ $P(B)=0{,}670$.

დავალება. წინა ამოცანის პირობებში ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ნაყიდი n ბილეთიდან ზუსტად m ($m\le n$) იქნება მომგებიანი.

მაგალითი 30 (ურთიერთობის უპირატესობაზე). დავუშვათ კლასში, რომელშიც 10 მოსწავლეა ტარდება გამოკითხვა, სადაც თითოეულმა მოსწავლემ ანკეტაში უნდა მიუთითოს ის სამი ამხანაგი, რომელსაც აძლევს უპირატესობას ცხრა ამხანაგიდან. A იყოს ხდომილება, რომ ერთ-ერთი მოსწავლე დასახელებულ იქნა ყველა შესაძლო ცხრა ანკეტაში. რას უდრის მისი ალბათობა, თუ ანკეტის შევსება იყო შემთხვევითი, ანუ ანკეტის შევსების ნებისმიერი კომბინაცია ტოლალბათურია.

ამოხსნა. ცალკეული მოსწავლისათვის ანკეტის შევსების სხვადასხვა კომბინაციათა რაოდენობა ტოლია C_9^3-ის, ხოლო 10 ანკეტის შევსების ვარიანტების რაოდენობა პირველი მაგალითის ანალოგიურად ტოლია $(C_9^3)^{10}$-ის. ვინაიდან ერთი ანკეტა შეიძლება შევსებულ იქნეს ნებისმიერად, ხოლო დანარჩენ ცხრა ანკეტაში ერთი პასუხი დაფიქსირებულია და დანარჩენი ორი პასუხი კი შეიძლება ნებისმიერად ამოირჩეს რვა შესაძლებელი პასუხიდან, ამიტომ ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა A-ში ტოლია $|A|=C_9^3\cdot(C_8^2)^9$ (თუ წყვილის პირველ კომპონენტს შეუძლია მიიღოს m განსხვავებული მნიშვნელობა, ხოლო მეორე კომპონენტს კი პირველისგან დამოუკიდებლად – n განსხვავებული მნიშვნელობა, მაშინ ასეთი წყვილების რაოდენობა ნამრავლის პრინციპის თანახმად იქნება – $m\cdot n$). აქედან გვაქვს:

$$P(A)=\frac{C_9^3\cdot(C_8^2)^9}{(C_9^3)^{10}}=(\frac{C_8^2}{C_9^3})^9=\frac{1}{3^9}.$$

დავალება. წინა ამოცანაში იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ერთ-ერთი სტუდენტი დასახელებული იქნება k-ჯერ ($k \le 9$).

მაგალითი 31 *(ორ „ტუზზე“).* განვიხილოთ პრეფერანსის თამაში, როდესაც კარტის შეკვრის მაღალი 32 კარტი შემთხვევით ნაწილდება (რიგდება) სამ მოთამაშეს შორის, ისე რომ თითეული ღებულობს 10 კარტს და ორი კარტი ინახება „საყიდლებში“. როგორია ალბათობა იმისა, რომ „საყიდლებში“ აღმოჩნდება ორი „ტუზი“?

ამოხსნა. ორი კარტის სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც შეიძლება აღმოჩნდეს „საყიდლებში“, ტოლია $C_{32}^2 = 496$. კარტის შეკვრაში ოთხი „ტუზია“და სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც მოგვცემდა ორ „ტუზს“, ტოლია $C_4^2 = 6$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$C_4^2 \big/ C_{32}^2 = 6/496 = 0{,}012.$$

დავალება. დავუშვათ წინა ამოცანაში ერთ-ერთმა მოთამაშემ, ნახა რა თავისი კარტები, იცის, რომ მას „ტუზი“ არა აქვს. შეიცვლება თუ არა მაშინ ალბათობა იმისა, რომ „საყიდლებში“ ორი „ტუზია“? გამოთვალეთ ეს ალბათობა.

მაგალითი 32 *(მხედველობით მოძებნაზე).* დავუშვათ გვაქვს N ცალი შემთხვევით დალაგებული გეომეტრიული ფიგურა, რომელთა შორის M ცალი მართკუთხედია ($M \le N$). მოითხოვება მოიძებნოს ყველა მართკუთხედი, თუ ძებნა წარმოებს ელემენტების (ფიგურების) სათითაოდ სკანირებით ფიქსაციის მოცულობით ერთი ელემენტი, ამასთანავე ხდება დაკვირვებული ელემენტის პოზიციის დამახსოვრება და მას თავიდან აღარ ვუბრუნდებით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დამკვირვებელი შეძლებს აღმოაჩინოს ყველა M მართკუთხედი არა უმეტეს n დაკვირვებისას ($n = M,..., N$)?

ამოხსნა. ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნე-ბა $|\Omega| = C_N^n$. ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები ისეთი $[a_1,..., a_n]$ ერთობლიობებია, რომლებშიც M ადგილას განთავსებულია მართკუთხედები (ამის შესაძლებლობათა

რაოდენობაა C_M^M), ხოლო დანარჩენ $N-M$ ადგილას კი არა მართკუთხედები (ამის შესაძლებლობათა რაოდენობაა C_{N-M}^{n-M}). ამიტომ ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა იქნება $C_M^M \cdot C_{N-M}^{n-M}$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია

$$P_M(n) = \frac{C_M^M \cdot C_{N-M}^{n-M}}{C_N^n} = \frac{C_{N-M}^{n-M}}{C_N^n} = \frac{C_n^M}{C_N^M} .$$

თავი III

შედგენილი ხდომილების ალბათობები

ალბათობათა შეკრების კანონი: თუ $A \cap B = \varnothing$, მაშინ

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

საწინააღმდეგო ხდომილების ალბათობა: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

სხვაობის ალბათობის ფორმულა: თუ $B \subset A$, მაშინ $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

საზოგადოდ: $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

თუ $A_i \cap A_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$, მაშინ: $P(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

როცა ხდომილებები თავსებადია: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

საზოგადოდ:

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^n A_i) .$$

პირობითი ალბათობის ფორმულა

A **ხდომილების პირობითი ალბათობა** პირობაში, რომ ადგილი ჰქონდა B ხდომილებას აღინიშნება $P(A|B)$ (ან $P_B(A)$) სიმბოლოთი და

$$P(A|B) := P(A\cap B)/P(B)\text{, თუ } P(B)\neq 0.$$

თვისებები:

$$0\le P(A|B)\le 1;$$

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A|B)=0;$$

$$B\subset A \Rightarrow P(A|B)=1;$$

თუ $A_i\cap A_j=\varnothing$, როცა $i\neq j$, მაშინ: $P[(\sum_{i=1}^{n}A_i)|B]=\sum_{i=1}^{n}P(A_i|B)$;

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B);$$

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B});$$

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A}\cup\overline{B});$$

$$P[(A\cup B)|C]=P(A|C)+P(B|C)-P[(A\cap B)|C];$$

$$P[(A\setminus B)|C]=P(A|C)-P[(A\cap B)|C].$$

ნამრავლის ალბათობის ფორმულა

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B).$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P[C|(A\cap B)].$$

საზოგადოდ:

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}).$$

ნებისმიერი A და B ხდომილებისათვის:

$$P(A|B)+P(\overline{A}|B)=1.$$

მართლაც, განმარტების თანახმად გვაქვს:

$$P(A|B)+P(\overline{A}|B)=\frac{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P[(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B)]}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

შენიშვნა. საზოგადოდ $P(A|B)+P(A|\overline{B})\neq 1$.

დამოკიდებული და დამოუკიდებელი ხდომილებები

A ხდომილებას ეწოდება B ხდომილებისაგან **დამოუკიდებელი,** თუ $P(A|B)=P(A)$ ან რაც იგივეა $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. თუ $P(A|B)\neq P(A)$, მაშინ გვაქვს **დამოკიდებული** ხდომილებები.

თუ A და B ხდომილებები დამოუკიდებელია, მაშინ ხდომილებები $\overline{A}$ და B აგრეთვე დამოუკიდებელია.

ორ A და B ხდომილებას ეწოდება **პირობითად დამოუკიდებელი** მოცემული C ხდომილების მიმართ, თუ $P(A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C)$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2,..., A_n$ ეწოდება **წყვილწყვილად დამოუკიდებელი** თუ: $P(A_i \cap A_j)=P(A_i)\cdot P(A_j), \quad \forall i\neq j$.

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2,..., A_n$ ეწოდება **ერთობლივად დამოუკიდებელი** თუ $\forall \quad k\leq n, \quad i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_k$: $P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k})=P(A_{i_1})\cdot P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$.

მაგალითი 1. ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს მათემატიკაში არის 2/3, ხოლო ფიზიკაში კი 4/9. ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს ერთ საგანში მაინც შეადგენს 4/5-ს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოსწავლე ორივე საგანში გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს მათემატიკაში, B – მოსწავლე გადალახავს მინიმალური კომპეტენციის ზღვარს ფიზიკაში. მაშინ ჩვენ გვაქვს, რომ: $P(A)=2/3$, $P(B)=4/9$ და $P(A\cup B)=4/5$. საპოვნელია – $P(A\cap B)$. ხდომილებათა ჯამის ალბათობის ფორმულიდან შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B).$$

შესაბამისად, გვაქვს:

$$P(A\cap B)=2/3+4/9-4/5=14/45.$$

მაგალითი 2. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 7 ან 11 ქულა?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 7 ქულა, B – ორი კამათლის გაგორებისას ჯამში მოვა 11 ქულა. ცხადია, რომ $A=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2)(3,4),(4,3)\}$ და $B=\{(5,6),(6,5)\}$. როგორც აღნიშნული იყო, ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება ტოლშესაძლებელი 36 ელემენტარული ხდომილებისაგან, ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად: $P(A)=6/36=1/6$ და $P(B)=2/36=1/18$. გარდა ამისა, გასაგებია, რომ A და B ხდომილებები უთავსებადია და, შესაბამისად, გვაქვს:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1/6+1/18=2/9.$$

მაგალითი 3 (მეტეოროლოგიური პარადოქსი). ერთი მეტეოროლოგიური სადგური 10-დან 9 შემთხვევაში სწორად იცნობს ამინდს, ხოლო მეორე კი 10-დან 8 შემთხვევაში. 1 აგვისტოსათვის პირველმა სადგურმა იწინასწარმეტყველა „სველი“ ამინდი, მეორე სადგურმა კი „მშრალი“ ამინდი. ვინაიდან სხვა შესაძლებლობა არ არსებობს, ამ ორი ხდომილების გაერთიანება წარმოადგენს აუცილებელ ხდომილებას: $\{\text{"სველი"}\}\cup\{\text{"მშრალი"}\}=\Omega$. ამასთანავე, ეს ხდომილებები ურთიერთგამომრიცხავია. შესაბამისად,

$$P(\{\text{"სველი"}\}\cup\{\text{"მშრალი"}\})=P\{\text{"სველი"}\}+P\{\text{"მშრალი"}\}=1.$$

შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A=\{\text{I სადგური სწორად იცნობს ამინდს}\},$$

$$B=\{\text{II სადგური სწორად იცნობს ამინდს}\}.$$

მაშინ, პირობის თანახმად $P(A)=0.9$ და $P(B)=0.8$. აქედან გამომდინარე, 1 აგვისტოს „სველი“ ამინდს უნდა ველოდეთ ალბათობით $P\{\text{"სველი"}\}=0.9$, ხოლო „მშრალი“ ამინდს ალბათობით $P\{\text{"მშრალი"}\}=0.8$. შესაბამისად,

$$1=P(\Omega)=P\{\text{"სველი"}\}\cup\{\text{"მშრალი"}\}=P\{\text{"სველი"}\}+P\{\text{"მშრალი"}\}=$$
$$=0.9+0.8=1.7.$$

სად დავუშვით შეცდომა? არ შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $P\{"\text{სველი}"\} = P(A)$ და $P\{"\text{მშრალი}"\} = P(B)$, თუნდაც იმის გამო, რომ A და B არ არის უთავსებადი (სინამდვილეში 0.9 არის პირობითი ალბათობა იმისა, რომ 1 აგვისტოს იქნება „სველი“ ამინდი, პირობაში რომ პროგნოზს აკეთებს I სადგური).

მაგალითი 4. თქვენ მოისმინეთ ახალ ამბებში, რომ 50%-ია შანსი იმისა, რომ შაბათს იწვიმებს და 50%-ია შანსი იმისა, რომ კვირას იწვიმებს. არის თუ არა სწორი: 100%-ია შანსი იმისა, რომ დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს.

ამოხსნა. ეს დასკვნა არ არის სწორი. თუ შემოვიღებთ ხდომილებებს: $A = \{\text{შაბათს იწვიმებს}\}$ და $B = \{\text{კვირას იწვიმებს}\}$, ხდომილება – დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს არის $A \cup B$. გვაქვს: $P(A) = P(B) = 0.5$. ამიტომ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B),$$

რაც ნაკლებია 1-ზე, ანუ შანსი იმისა, რომ დასვენების დღეებში იწვიმებს ნაკლებია 100%-ზე. შეცდომა მდგომარეობს იმაში, რომ ჩვენ შეგვიძლია ალბათობების პირდაპირი შეკრება მხოლოდ მაშინ, როცა ხდომილებები უთავსებადია მაშინ, როდესაც, საზოგადოდ, ალბათობების ჯამს უნდა გამოვაკლოთ თანაკვეთის ალბათობა, რომელიც ამ შემთხვევაში ნიშნავს, რომ იწვიმებს როგორც შაბათს, ისე კვირას.

მაგალითი 5. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ რიცხვებიდან 1,...,100 შემთხვევით ამორჩეული რიცხვი გაიყოფა ან 2-ზე, ან 3-ზე, ან 5-ზე.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A_k = \{\text{რიცხვი იყოფა } k - \text{ზე}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. მაშინ საძიებელია $P(A_2 \cup A_3 \cup A_5)$. ცხადია, რომ: $A_2 \cap A_3 = A_6$, $A_2 \cap A_5 = A_{10}$, $A_3 \cap A_5 = A_{15}$ და $A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$. ადვილი მისახვედრია, რომ:

$$P(A_2) = 50/100 = 0.5,\ P(A_3) = 33/100 = 0.33;$$

$$P(A_5) = 20/100 = 0.2;\ P(A_6) = 16/100 = 0.16;$$

$$P(A_{10}) = 10/100 = 0.1;\ P(A_{15}) = 6/100 = 0.06;$$

$P(A_{30}) = 3/100 = 0.03$.

ამიტომ სამი ხდომილებისათვის ჯამის ალბათობის ფორმულის მიხედვით ვღებულობთ, რომ:

$$P(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = 0.5 + 0.33 + 0.2 - 0.16 - 0.1 - 0.06 + 0.03 = 0.74.$$

მაგალითი 6. ყუთში არის 10 თეთრი, 10 შავი და 10 წითელი ბურთი. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 5 ბურთს დაბრუნების გარეშე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მათში არ იქნება ყველა ფერი?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$W = \{\text{არ არის თეთრი}\},\ B = \{\text{არ არის შავი}\} \text{ და}$$

$$R = \{\text{არ არის წითელი}\}.$$

მაშინ ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება იქნება $W \cup B \cup R$. ცხადია, რომ $W \cap B \cap R = \varnothing$. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(W) = P(B) = P(R) = C_{20}^5 / C_{30}^5;$$

$$P(W \cap B) = P(B \cap R) = P(R \cap W) = C_{10}^5 / C_{30}^5.$$

შესაბამისად, სამი ხდომილებისათვის ჯამის ალბათობის ფორმულა გვაძლევს:

$$P\{\text{არ არის ყველა ფერი}\} = 3C_{20}^5 / C_{30}^5 - 3C_{10}^5 / C_{30}^5 + 0 \approx 0.32.$$

მაგალითი 7. ალბათობა იმისა, რომ იწვიმებს შაბათს იგივეა რაც ალბათობა იმისა, რომ იწვიმებს კვირას და არის 0.5. ასევე ცნობილია, რომ წვიმიან დღეს მოსდევს წვიამიანი დღე ალბათობით 0.7. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A = \{\text{შაბათს იწვიმებს}\}$ და $B = \{\text{კვირას იწვიმებს}\}$, მაშინ ხდომილება – დასვენების დღეების განმავლობაში იწვიმებს არის $A \cup B$. გვაქვს: $P(A) = P(B) = 0.5$ და $P(B \mid A) = 0.7$. შესაბამისად,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 - P(A \cap B),$$

ხოლო ნამრავლის ალბათობის ფორმულა გვაძლევს, რომ

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = 0.7 \cdot 0.5 = 0.35.$$

ამიტომ გვაქვს: $P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65$.

მაგალითი 8. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ 4 კარტს დაბრუნების გარეშე. თუ მათში აღმოჩნდა k „ტუზი“, მაშინ მეორე 52 კარტიდან იღებენ k კარტს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ორივე დასტიდან აღებული იქნება ზუსტად ორ-ორი „ტუზი“?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: $A = \{$ორი "ტუზი" I დასტიდან$\}$ და $B = \{$ორი "ტუზი" II დასტიდან$\}$. ჩვენთვის საინტერესო ხდომილება იქნება $A \cap B$, რომლის ალბათობის პირდაპირი გზით გამოთვლა არ არის მარტივი, მაგრამ საქმე საკმაოდ გამარტივდება თუ გამოვიყენებთ პირობით ალბათობის ცნებას და ვისარგებლებთ ნამრავლის ალბათობის ფორმულით. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{48}^2}{C_{52}^2} \text{ და } P(B \mid A) = \frac{C_4^2}{C_{52}^2}$$

და, შესაბამისად, $P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) \approx 0.0001$.

მაგალითი 9. განვიხილოთ ოჯახები, სადაც ორ-ორი ბავშვია. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ოჯახში ორივე ბავშვი ვაჟია თუ ცნობილია, რომ: ა) უფროსი ბავშვი – ვაჟია; ბ) ერთი ბავშვი მაინც – ვაჟია?

ამოხსნა. აქ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე ასეთია

$$\Omega = \{\text{ვვ}, \text{ვქ}, \text{ქვ}, \text{ქქ}\},$$

სადაც „ვ“ აღნიშნავს ვაჟს, ხოლო „ქ“ – ქალს. ჩავთვალოთ, რომ ოთხივე შედეგი ტოლალბათურია. შემოვიღოთ ხდომილებები: A – იყოს ხდომილება, რომ უფროსი ბავშვი – ვაჟია, ხოლო B – იყოს ხდომილება, რომ უმცროსი ბავშვი – ვაჟია. მაშინ $A \cap B$ – იქნება ხდომილება, რომ ორივე ბავშვი ვაჟია, ხოლო $A \cup B$ – კი იქნება ხდომილება, რომ ერთი ბავშვი მაინც ვაჟია. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობები იქნება: ა) $P(A \cap B \mid A)$ და ბ) $P(A \cap B \mid A \cup B)$. ადვილი დასანახია, რომ:

$$P(A\cap B\,|\,A)=\frac{P[(A\cap B)\cap A]}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2},$$

$$P(A\cap B\,|\,A\cup B)=\frac{P[(A\cap B)\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}.$$

მაგალითი 10. თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია, მაშინ დამოუკიდებელია აგრეთვე ხდომილებები: A და $\overline{B}$, $\overline{A}$ და B, $\overline{A}$ და $\overline{B}$. ადვილი მისახვედრია, რომ საკმარისია შემოწმდეს A და $\overline{B}$ ხდომილებების დამოუკიდებლობა. შესამოწმებელია, რომ $P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$. გვაქვს:

$$P(A)=P(A\cap\Omega)=P[A\cap(B\cup\overline{B})]=P[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})]=$$
$$=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}).$$

ამიტომ, A და B ხდომილებების დამოუკიდებლობის საფუძველზე ვღებულობთ შესამოწმებელ თანაფარდობას:

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)P(\overline{B}).$$

მაგალითი 11. ორ კამათელს აგდებენ ორჯერ. იპოვეთ ალბათობა იმისა რომ ამ აგდებებისას მოსულ ქულათა ჯამები იქნება 7 და 11.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i − ორი კამათლის i-ური ($i=1,2$) გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი 7 ქულა, B_i − ორი კამათლის i-ური ($i=1,2$) გაგორებისას მოსულ ქულათა ჯამი იქნება 11 ქულა. ცხადია, რომ ხდომილებათა წყვილები A_1 და B_2 და A_2 და B_1 დამოუკიდებელია, როგორც დამოუკიდებელი აგდებების შედეგები, ხოლო ხდომილებები $A_1\cap B_2$ და $B_1\cap A_2$ უთავსებადია. ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P[(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap A_2)]=P(A_1\cap B_2)+P(B_1\cap A_2)=$$
$$=P(A_1)P(B_2)+P(B_1)P(A_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{18}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{54}.$$

მაგალითი 12. A და B დამოუკიდებელი ხდომილებებია და $P(A\,|\,B)+\ P(A\,|\,\overline{B})=1$. იპოვეთ $P(A)$.

ამოხსნა. ვინაიდან A და B დამოუკიდებელია, ამიტომ დამოუკიდებელი იქნება აგრეთვე A და $\overline{B}$. შესაბამისად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$1 = P(A \mid B) + P(A \mid \overline{B}) = P(A) + P(A) = 2P(A).$$

ამიტომ $P(A) = 1/2$.

მაგალითი 13. თუ უთავსებად A და B ხდომილებებს გააჩნიათ არანულოვანი ალბათობები, მაშინ ისინი არადამოუკიდებელია. მართლაც, ვინაიდან $A \cap B = \varnothing$, ამიტომ თუ A და B იქნებოდა დამოუკიდებელი, მაშინ უნდა შესრულდეს ტოლობა

$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0,$$

რაც ეწინააღმდეგება პირობას, რომ $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$.

მაგალითი 14. 36 კარტისაგან შემდგარი დასტიდან შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. არის თუ არა დამოუკიდებელი ხდომილებები: A – ეს კარტი მეფეა, B – ეს კარტი აგურისაა?

ამოხსნა. ცხადია, რომ $A \cap B$ იქნება ხდომილება, რომ ეს კარტი აგურის მეფეა. ალბათობის კლასიკური განმარტებიდან გვაქვს:

$$P(A \cap B) = 1/36,\ P(A) = 4/36,\ P(B) = 9/36.$$

რამდენადაც ამ შემთხვევაში სრულდება ტოლობა $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ამიტომ აღნიშნული ხდომილებები დამოუკიდებელია.

მაგალითი 15. 52 კარტიდან შემთხვევით იღებენ კარტს. განვიხილოთ ხდომილებები: A={კარტი „ტუზია“} და B={კარტი „გულისაა“}. არის თუ არა A და B დამოუკიდებელი?

ამოხსნა. ინტუიციურად გასაგებია, რომ ეს ხდომილებები არ იძლევა ინფორმაციას მეორის შესახებ. „ტუზის“ ამოღების ალბათობაა 4/52=1/13 და თუ თქვენ გაქვთ ინფორმაცია, რომ ამოღებული კარტი „გულისაა“, მაშინ „ტუზის“ ალბათობა ისევ 1/13-ია. „ტუზის“ პროპორცია მთლიან დასტაში იგივეა რაც ცალკე განხილულ „გულებში“.

ახლა ფორმალურად შევამოწმოთ, რომ ეს ხდომილებები დამოუკიდებელია. გვაქვს:

$$P(A)=4/52,\ P(B)=13/52=1/4,$$
$$P(A\cap B)=P\{\text{"ტუზი" "გულისაა"}\}=1/52$$

და, შესაბამისად, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. მაშასადამე, A და B დამოუკიდებელია.

მაგალითი 16. თუ მაგალით 15-ში კარტის დასტიდან წინასწარ გადავაგდებთ „აგურის“ 2-იანს დარჩება თუ არა A და B დამოუკიდებელი?

ამოხსნა. ერთი შეხედვით უნდა ვიფიქროთ, რომ პასუხი დადებითია, ვინაიდან „აგურის“ 2-იანს არაფერი საერთო არა აქვს არც „გულებთან“ და არც „ტუზებთან“. მაგრამ სინამდვილეში ეს ასე არ არის. კარტის გადაგდებამ შეცვალა „ტუზის“ პროპორცია დასტაში (4/51-ის ნაცვლად გახდა 4/51), მაშინ როცა არ შეცვლილა პროპორცია „გულებში“ (ის ისევ დარჩა 1/13). ფორმალურად უპირობო ალბათობა $P(A)=4/51$, ხოლო პირობითი კი არის $P(A\,|\,B)=1/13$ და ესენი ტოლი არ არის.

მაგალითი 17 (დე მერეს ამოცანა). აზარტული თამაშების მოყვარული ფრანგი შევალიე დე მერე სთავაზობდა პარტნიორებს თამაშის შემდეგ პირობებს: ის გააგორებს ორ კამათელს 24-ჯერ და მოგებული იქნება თუ ერთჯერ მაინც მოვა ორი ექვსიანი. მისი მოწინააღმდეგე გააგორებს ოთხ კამათელს ერთჯერ და მოიგებს თუ ერთი ექვსიანი მაინც მოვა. ერთი შეხედვით დე მერე ეშმაკობს, მაგრამ სინამდვილეში ის უფრო ხშირად აგებდა, ვიდრე იგებდა და გაკვირვებულმა მიმართა ცნობილ მათემატიკოსს ბ. პასკალს. გავარკვიოთ რა უპასუხა მას პასკალმა.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A=\{$ორი კამათლის 24-ჯერ გაგორებისას ერთჯერ მაინც მოვა ორი ექვსიანი$\}$;

$A_i=\{$ორი კამათლის i-ური გაგორებისას არ მოვა ორი ექვსიანი$\}$, $i=1,2,\ldots 24$;

$B=\{$ოთხი კამათლის ერთჯერ გაგორებისას მოვა ერთი ექვსიანი მაინც$\}$;

$B_i=\{$ექვსიანი არ მოვა i-ურ კამათელზე$\}$, $i=1,2,3,4$.

ცხადია, რომ A_i ხდომილებები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია და $\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{24} A_i$. გარდა ამისა, $P(A_1) = P(A_2) = \cdots = P(A_{24}) = 35/36$. შესაბამისად,

$$P(\overline{A}) = P(\bigcap_{i=1}^{24} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_{24}) = (\frac{35}{36})^{24}.$$

ამიტომ შევალიე დე მერეს მოგების ალბათობა იქნება:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \approx 0.491404.$$

ანალოგიურად გასაგებია, რომ B_i ხდომილებები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია, $\overline{B} = \bigcap_{i=1}^{4} B_i$, $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = 5/6$ და

$$P(\overline{B}) = P(\bigcap_{i=1}^{4} B_i) = P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) \cdot P(B_4) = (\frac{5}{6})^4.$$

შესაბამისად, შევალიე დე მერეს მოწინააღმდეგის მოგების ალბათობა იქნება:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - (\frac{5}{6})^4 \approx 0.517747.$$

როგორც ვხედავთ, $P(A) < P(B)$, რაც წარმოადგენს დე მერეს დაკვირვების მეცნიერულ ახსნას.

მაგალითი 18. გონებაგაფანტული მოქალაქე უადგილო ადგილას ქუჩაზე გადასვლისათვის 12-ჯერ იქნა დაჯარიმებული. ცნობილია, რომ ეს ყოველთვის ხდებოდა სამშაბათობით ან ხუთშაბათობით. აიხსნება ეს შემთხვევითობით, თუ ამ დღეებში პატრული აძლიერებს საგზაო მოძრაობის კონტროლს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$A = \{12\text{-ჯერ დააჯარიმეს სამშაბათობით ან ხუთშაბათობით შემთხვევით}\};$$

$$A_k = \{k\text{-ური დაჯარიმება სამშაბათობით ან ხუთშაბათობით შემთხვევით}\}, \quad k = 1, 2, \ldots 12;$$

$$B = \{12\text{-ჯერ დააჯარიმეს კვირის ერთსა და იმავე ორ დღეს შემთხვევით}\}.$$

ცხადია, რომ $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{12}$; $P(A_k) = 2/7$, $k = 1,2,...,12$ და

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_{12}) = (2/7)^{12} \approx 0.0000003.$$

მეორეს მხრივ, კვირის ერთსა და იმავე ორ დღეს 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება იქნება გაერთიანება თანაუკვეთი ხდომილებების: 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება ორშაბათობით ან სამშაბათობით, 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება ორშაბათობით ან ოთხშაბათობით და ა.შ. 12-ჯერ შემთხვევით დაჯარიმება შაბათობით ან კვირაობით. თითოეული ამ ხდომილების ალბათობა ტოლია 0.0000003-ის, ხოლო მათი რაოდენობა შეადგენს $C_7^2 = 21$-ს. შესაბამისად,

$$P(B) = 21 \cdot 0.0000003 = 0.0000063.$$

ორივე ეს ალბათობა ძალიან მცირეა ანუ როგორც ერთ, ისე მეორე შემთხვევაში დაჯარიმების ალბათობა მიზერულად მცირეა, რაც მიუთითებს იმაზე, რომ აღნიშნულ დღეებში პატრული უფრო მეტად მომთხოვნია.

მაგალითი 19. თქვენ იცით, რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს 2 შვილი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მას ჰყავს 2 ქალიშვილი, თუ ცნობილია, რომ მას ჰყავს სულ ცოტა ერთი ქალიშვილი?

ამოხსნა. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეა $\Omega = \{bb, bg, gb, gg\}$, სადაც ბიჭი ($b$) და გოგო ($g$) დალაგებულია დაბადების თარიღის მიხედვით. თუ ჩვენ ვიგულისხმებთ, რომ ბიჭისა და გოგოს დაბადება ერთნაირადაა შესაძლებელი და სხვადასხვა ბავშვის სქესი დამოუკიდებელია, მაშინ თითოეული ელემენტარული ხდომილების ალბათობაა 1/4. საძიებელი პირობითი ალბათობა იქნება

$$P(gg \mid bg, gb, gg) = \frac{P(gg)}{P(bg, gb, gg)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

მაგალითი 20. თქვენ იცით, რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს 2 შვილი. ერთ დღეს თქვენ დაინახეთ, რომ მეზობელი სეირნობდა თავის გოგონასთან ერთად. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მეზობლის მეორე შვილიც გოგონაა?

ამოხსნა. ერთი შეხედვით ეს მაგალითი 19-ის მსგავსია. თქვენმა დაკვირვებამ გამორიცხა 2 ბიჭის შემთხვევა bb და პირობითი ალბათობა მეორე რომ გოგონაა უნდა იყოს 1/3. მეორეს მხრივ, ვინაიდან ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ სხვადასხვა ბავშვის სქესი დამოუკიდებელია, ალბათობა უნდა იყოს 1/2.

ავხსნათ რაშია აქ საქმე. პირველი ამოხსნა არასწორია. 1/3 არის ალბათობა იმისა, რომ მეზობელს ჰყავს 2 გოგონა, როცა ცნობილია, რომ მას ჰყავს სულ ცოტა ერთი გოგონა. ხოლო უკანასკნელ შემთხვევაში ჩვენ არ ვფლობთ ანალოგიურ ინფოორმაციას. ჩვენ მხოლოდ იმას დავაკვირდით, რომ მეზობელი სეირნობდა *კონკრეტულ გოგონასთან.* ეს განსხვავება ძალიან მნიშვნელოვანი და არსებითია და მოითხოვს გავაფართოვოთ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე, რათა გვქონდეს შესაძლებლობა აღვწეროთ როგორ ირჩევს მეზობელი თუ რომელ ბავშვთან ერთად წავა სასეირნოდ. ამ მიზნით, ბავშვს, რომელიც მიდის მშობელთან ერთად სასეირნოდ გავუკეთოთ ზედა ინდექსად ვარსკვლავი. მაშინ ახალი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება

$$\Omega = \{b^*b, bb^*, b^*g, bg^*, g^*b, gb^*, g^*g, gg^*\},$$

სადაც, მაგალითად, b^*g ნიშნავს, რომ უფროსი შვილი ბიჭია, ხოლო უმცროსი – გოგონა და მშობელი სეირნობს ბიჭთან ერთად. თუ მშობელი ბავშვს ირჩევს შემთხვევით, მაშინ ყველა ელემენტარულ ხდომილებას აქვს 1/8-ის ტოლი ალბათობა. ახლა ადვილი დასანახია, რომ 4 ელემენტარული ხდომილების დროს სეირნობს მშობელი გოგონასთან და აქედან ორ შემთხვევაში მეორე ბავშვი აგრეთვე გოგონაა. შესაბამისად, საძიებელი პირობითი ალბათობა იქნება 2/4=1/2.

მაგალითი 21. სისტემა შედგება დამოუკიდებლად ფუნქციონირებადი ორი კომპონენტისაგან, რომელთაგან თითოეული ფუნქციონირებს ალბათობით p. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ სისტემა იფუნქციონირებს კომპონენტების: ა) მიმდევრობითი შეერთებისას; ბ) პარალელური შეერთებისას.

ამოხსნა. შემოვილოთ ხდომილებები:

$A = \{\text{სისტემა ფუნქციონირ ებს}\}$,

$A_1 = \{\text{I კომპონენტი ფუნქციონირებს}\}$,

$A_2 = \{\text{II კომპონენტი ფუნქციონირებს}\}$.

მაშინ ა) შემთხვევაში $A = A_1 \cap A_2$, ხოლო ბ) შემთხვევაში კი – $A = A_1 \cup A_2$ და დამოუკიდებლობის გამო შესაბამისად გვაქვს:

ა) $P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = p \cdot p = p^2$;

ბ) $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) =$

$= 1 - (1-p)(1-p) = 1 - (1-p)^2$.

მაგალითი 22 („ბედნიერ“ ბილეთებზე). 25 საგამოცდო ბილეთიდან 5 „ბედნიერია“, ხოლო დანარჩენი 20 – „არა ბედნიერი“. რომელ სტუდენტს აქვს „ბედნიერი“ ბილეთის აღების მეტი ალბათობა: ვინც პირველი იღებს ბილეთს, თუ ვინც მეორე იღებს ბილეთს?

ამოხსნა. I თავში ეს მაგალითი უკვე ამოვხსენით ალბათობის კლასიკური განმარტების გამოყენებით. ამოვხსნათ ახლა იგი ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ახლებური შემოტანითა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით. წინასწარ შემოვილოთ შემდეგი ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღო ბედნიერი ბილეთი, ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ მეორე სტუდენტმა აიღო ბედნიერი ბილეთი. მაშინ ცხადია, რომ ურთიერთგამომრიცხავ ხდომილებათა სიმრავლე შედგება ოთხი ხდომილებისაგან

$$A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B}.$$

ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად $P(A) = 5/25 = 1/5$, ხოლო $P(\overline{A}) = 20/25 = 4/5$. მეორე მხრივ, ამოცანის შინაარსიდან გამომდინარე, თუ ცნობილია, რომ პირველმა სტუდენტმა აიღო ბედნიერი ბილეთი, მაშინ ალბათობა იმისა რომ მეორე სტუდენტი აიღებს ბედნიერ ბილეთს ისევ შეიძლება გამოვითვალოთ ალბათობის კლასიკური განმარტებით: ამ შემთხვევაში ყველა შესაძლო შედეგთა რაოდენობაა 24, ხოლო

ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა კი მხოლოდ 4 (რადგან ერთი ბედნიერი ბილეთი უკვე აღებულია) და, შესაბამისად,

$$P(B\,|\,A) = 4/24 = 1/6.$$

ანალოგიურად, $P(\overline{B}\,|\,A) = 20/24 = 5/6$, $P(B\,|\,\overline{A}) = 5/24 = 5/24$ და $P(\overline{B}\,|\,\overline{A}) = 19/24$. ამიტომ ორი ხდომილების ნამრავლის ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B\,|\,A) = 1/5\cdot 1/6 = 1/30;\ P(A\cap \overline{B}) = 1/5\cdot 5/6 = 1/6;$$

$$P(\overline{A}\cap B) = 4/5\cdot 5/24 = 1/6 \text{ და } P(\overline{A}\cap \overline{B}) = 4/5\cdot 19/24 = 19/30$$

(შევნიშნავთ, რომ ჩვენ აქ მხოლოდ სისრულისათვის გამოვთვალეთ ყველა შესაძლო პირობითი და ნამრავლის ალბათობები).

ცხადია, რომ $B = (A\cap B) + (\overline{A}\cap B)$. ამიტომ ალბათობათა შეკრების კანონის თანახმად

$$P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = 1/30 + 1/6 = 1/5\ (= P(A)).$$

მაგალითი 23. ყუთში m ბურთია, მათ შორის n თეთრია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ყუთიდან ორი ბურთის მიმდევრობით დაბრუნების გარეშე ამოღებისას: ა) პირველი ბურთი თეთრია; ბ) მეორე ბურთი თეთრია; გ) ორივე ბურთი თეთრია.

ამოხსნა. A_i იყოს ხდომილება, რომ i-ური ბურთი თეთრია ($i = 1,2$). მაშინ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

ა) $P(A_1) = n/m$.

გარდა ამისა,

$$P(A_2\,|\,A_1) = (n-1)/(m-1) \text{ და } P(A_2\,|\,\overline{A_1}) = n/(m-1).$$

ამიტომ ნამრავლის ალბათობის ფორმულის თანახმად:

გ) $P(A_1\cap A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1) = n(n-1)/m(m-1)$.

ანალოგიურად,

$$P(\overline{A_1}\cap A_2) = P(\overline{A_1})\cdot P(A_2\,|\,\overline{A_1}) = n(m-n)/m(m-1).$$

ამიტომ:

ბ) $P(A_2)=P[(A_1\cap A_2)+(\overline{A_1}\cap A_2)]=P(A_1\cap A_2)+P(\overline{A_1}\cap A_2)=n/m$.

მაგალითი 24. ყუთს აქვს n უჯრა. ალბათობა იმისა რომ ბურთი არის ამ უჯრებიდან ერთ-ერთში ტოლია p-სი. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ბურთი არის i-ურ უჯრაში, თუ ცნობილია, რომ ბურთი თითეულ უჯრაში შესაძლებელია იყოს თანაბარი ალბათობებით?

ამოხსნა. A_i იყოს ხდომილება, რომ ბურთი არის i-ურ უჯრაში. A იყოს ამ ხდომილებების გაერთიანება $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. პირობის თანახმად

$$P(A)=p \text{ და } P(A_i\mid A)=1/n.$$

ამიტომ

$$P(A_i)=P(A_i\cap A)=P(A)P(A_i\mid A)=p\cdot 1/n=p/n.$$

მაგალითი 25. კარტების ნაკრებიდან (რომელშიც 36 კარტია) შემთხვევით იღებენ ერთ კარტს. განვიხილოთ ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი „აგურისაა“, ხოლო B იყოს ხდომილება, რომ ამოღებული კარტი „სურათიანია“ წითელი ფერით. არიან თუ არა ეს ხდომილებები დამოუკიდებელი?

ცხადია, რომ ამ შემთხვევაში

$$|\Omega|=36,\ P(A)=9/36=1/4,\ P(B)=8/36=2/9 \text{ და}$$
$$P(A\cap B)=4/36\neq 1/4\cdot 2/9=P(A)\cdot P(B).$$

ე.ი. ეს ხდომილებები არაა დამოუკიდებელი.

მაგალითი 26. დავუშვათ, რომ ვაგორებთ ორ სათამაშო კამათელს. განვიხილოთ ხდომილებები: A – პირველ კამათელზე მოვიდა კენტი ქულა, B – მეორე კამათელზე მოვიდა კენტი ქულა, C – ორივე კამათელზე მოსულ ქულათა ჯამი კენტია. გავარკვიოთ ამ ხდომილებების დამოუკიდებლობის საკითხი.

ცხადია, რომ $P(A)=P(B)=3/6=1/2$, ხოლო $P(A\cap B)=3\cdot 3/36=1/4$. ამიტომ A და B ხდომილებები დამოუკიდებლია.

დავალება. შეამოწმეთ, რომ $P(C)=1/2$.

შევნიშნოთ, რომ A და B ხდომილებიდან ერთ-ერთის მოხდენის პირობაში C ხდომილება ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ან პირველ, ან მეორე კამათელზე, შესაბამისად, მოვიდა ლუწი ქულა ანუ გვაქვს თანაფარდობები:

$$A \cap C = A \cap \overline{B} \text{ და } B \cap C = \overline{A} \cap B.$$

A და B ხდომილებების დამოუკიდებლობიდან გამომდინარე ხდომილებები A და $\overline{B}$ და $\overline{A}$ და B აგრეთვე დამოუკიდებლებია, ამიტომ

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 1/4 \text{ და } P(\overline{A} \cap B) = 1/4.$$

შესაბამისად,

$$P(A \cap C) = P(A \cap \overline{B}) = 1/4 \text{ და } P(B \cap C) = P(\overline{A} \cap B) = 1/4.$$

ეს თანაფარდობები კი, $P(C) = 1/2$ ალბათობის გათვალისწინებით ნიშნავს, რომ დამოუკიდებლებია A და C და B და C ხდომილებათა წყვილებიც.

დავალება. შეამოწმეთ, რომ ხდომილებები 26-ე მაგალითიდან არ არის ერთობლივად დამოუკიდებელი.

მაგალითი 27. დავუშვათ, ვაგდებთ სამ მონეტას. შემოვიღოთ ხდომილებები:

A_1 – პირველი და მეორე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე;

A_2 – მეორე და მესამე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე;

A_3 – პირველი და მესამე მონეტა დაეცა ერთი და იგივე მხარეზე.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ აქედან ნებისმიერი ორი ხდომილება დამოუკიდებელია, ხოლო სამივე ერთად დამოკიდებულია, ვინაიდან თუ ჩვენ გვეცოდინება რომ მაგალითად, A_1 და A_2 მოხდა, მაშინ ჩვენ ზუსტად ვიცით, რომ A_3 აგრეთვე მოხდა.

დავალება. შეამოწმეთ, რომ ხდომილებები A_1, A_2 და A_3 წყვილ-წყვილად დამოუკიდებელია.

მაგალითი 28 (დაბადების დღეებზე). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კონკრეტული სკოლის 150 მოსწავლიდან ერთი მაინც დაბადებულია მოცემულ ფიქსირებულ დღეს, მაგალითად, პირველ სექტემბერს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$A_i = \{i-$ური სტუდენტი დაბადებულია 1.09$\}$, $i = 1,2,...,150$;

$A = \{$ერთი მაინც 150 სტუდენტიდან დაბადებულია 1.09$\}$.

ნათელია, რომ A_i ხდომილებები ერთობლივად დამოუკიდებელია და $P(A_i) = 1/365$. გარდა ამისა, $A = \bigcup_{i=1}^{150} A_i$ და, მაშასადამე, საპოვნელია დამოუკიდებელ ხდომილებათა გაერთიანების ალბათობა. გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე და ვისარგებლოთ დე-მორგანის კანონით. მაშინ გვაქვს:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{\bigcup_{i=1}^{150} A_i}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{150} \overline{A_i}) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdots P(\overline{A_n}).$$

რამდენადაც $P(\overline{A_i}) = 1 - 1/365$, თუ ვისარგებლებთ ნიუტონის ბინომის ფორმულით $(1+x)^n = \sum_{j=1}^{n} C_n^j x^j$, მივიღებთ, რომ:

$$P(A) = \frac{150}{365} - C_{150}^2 (\frac{1}{365})^2 + C_{150}^3 (\frac{1}{365})^3 - C_{150}^4 (\frac{1}{365})^4 + \cdots.$$

ვინაიდან, $150/365 \cong 0{,}41$, ხოლო

$$C_{150}^4 (\frac{1}{365})^4 < (\frac{150}{365})^4 \frac{1}{24} \cong \frac{(0,41)^4}{24} < 0.005,$$

ამიტომ მწკრივის ნიშანცვლადობის გამო, თუ გადავაგდებთ მწკრივის წევრებს დაწყებული მე-5 წევრიდან (მწკრივების ზოგადი თეორიიდან გამომდინარე), შესაძლებელია ვამტკიცოთ, რომ

$$P(A) \cong 0.41 - \frac{(0.41)^2}{2} + \frac{(0.41)^3}{6} \cong 0.41 - 0.08 + 0.01 = 0.34.$$

მაგალითი 29 (საუკეთესოს შერჩევაზე). მოცემულია m ობიექტი გადანომრილი რიცხვებით $1,2,...,m$, ამასთანავე ისე, რომ ვთქვათ, ობიექტი 1 კლასიფიცირდება როგორც „საუკეთესო“, ..., ობიექტი m კი როგორც „ყველაზე უარესი“. იგულისხმება რომ ობიექტები შემოდის დროის მომენტებში $1,2,...,m$ შემთხვევითი რიგით (ანუ ყველა შესაძლო $m!$ გადანაცვლება ტოლალბათურია). დამკვირვებელს შეუძლია ორი მათგანის შედარებით

თქვას რომელია უკეთესი და რომელი უარესი. საჭიროა საუკეთესოს შერჩევა იმ პირობით რომ ობიექტები წარმოიდგინება სათითაოდ და უკუგდებულის დამახსოვრება ხდება დამკვირვებლის მიერ. არ შეიძლება საუკეთესოდ მიჩნეულ იქნეს ის ობიექტი, რომელიც დაკვირვებული ობიექტებიდან ერთზე მაინც უარესია ან რომელიც უკვე იქნა უკუგდებული. ვთქვათ, დამკვირვებელმა ობიექტი შეარჩია k-ურ ნაბიჯზე ($k \le m$), ანუ დათვალიერებული ობიექტებიდან უკანასკნელი აღმოჩნდა ყველა წინაზე უკეთესი და ამიტომ მოხდა მისი შერჩევა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ამორჩეული ობიექტი იქნება საუკეთესო მთელი ერთობლიობიდან როგორც უკვე განხილულ, ისე ჯერ კიდევ განუხილავ ობიექტებს შორის?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A იყოს ხდომილება, რომ k-ური ობიექტი საუკეთესოა ყველა არსებულ m ობიექტს შორის და B იყოს ხდომილება, რომ k-ური ობიექტი საუკეთეოა დაკვირვებულ k ობიექტს შორის. გასაგებია, რომ მოსაძებნია პირობითი ალბათობა $P(A|B)$.

ვინაიდან $A \subset B$, ამიტომ $A \cap B = A$ და $P(A \cap B) = P(A)$. შესაბამისად, პირობითი ალბათობის განმარტების თანახმად

$$P(A|B) = P(A)/P(B)$$

ვინაიდან ობიექტების ყველა შესაძლო გადანაცვლებები ტოლალბათურია, ამიტომ ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად ადვილი დასანახია, რომ

$$P(B) = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k} \text{ და } P(A) = \frac{(m-1)!}{m!} = \frac{1}{m}.$$

შესაბამისად, $P(A|B) = k/m$.

სტრატეგია. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ საუკეთესო ობიექტის ამორჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მოწყობილია შემდეგნაირად. ავღნიშნოთ სიმბოლოთი m^* ისეთი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც სამართლიანია უტოლობა

$$\frac{1}{m^*} + \cdots + \frac{1}{m-1} \le 1 < \frac{1}{m^*-1} + \cdots + \frac{1}{m-1}.$$

საუკეთესო ობიექტის არჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მდგომარეობს იმაში, რომ დავაკვირდეთ და უკუვაგდოთ პირველი $m^* - 1$ ობიექტი და შემდეგ გავაგრძელოთ დაკვირვება ისეთ τ^* მომენტამდე, როცა პირველად გამოჩნდება ყველა წინამორბედზე უკეთესი ობიექტი.

მაგალითად, თუ $m = 1,...,10$, მაშინ m^*-ის შესაბამისი მნიშვნელობებია:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m-ოპტიმალური	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4

საკმაოდ დიდი m-ისათვის $m^* \approx m/e$ (სადაც e – ნეპერის რიცხვია, $e \cong 2.718$) და საუკეთესო ობიექტის არჩევის ალბათობა დაახლოებით ტოლია $1/e \cong 0.368$ (თუმცა, ერთი შეხედვით, ბუნებრივია, მოგვჩვენებოდა, რომ განსახილველი ობიექტების m რაოდენობის ზრდასთან ერთად, საუკეთესო ობიექტის არჩევის ალბათობა უნდა წასულიყო ნულისაკენ). ე. ი. *საუკეთესო ობიექტის არჩევის ოპტიმალური სტრატეგია მდგომარეობს იმაში, რომ უნდა უკუვაგდოთ ობიექტების საერთო რაოდენობის დაახლოებით მესამედი და შემდეგ ავირჩიოთ პირველი ისეთი ობიექტი, რომელიც ყველა წინაზე უკეთესია.*

თავი IV
სრული ალბათობის ფორმულა. განმეორებითი ცდები

სრული ალბათობის ფორმულა

ხდომილებათა ერთობლიობას $A_1, A_2, ..., A_n$ ეწოდება **ხდომილებათა სრული სისტემა,** თუ $A_i \cap A_j = \varnothing$, როცა $i \neq j$ და $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ (მაგალითად, A და $\overline{A}$).

თუ $A_1, A_2, ..., A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა ($P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, ..., n$), მაშინ ადგილი აქვს **სრული ალბათობის ფორმულას:**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i) .$$

ბაიესის ფორმულა

თუ $A_1, A_2,..., A_n$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, $P(A_i) > 0$, $i = 1,2,..., n$, მაშინ ადგილი აქვს **ბაიესის ფორმულას:**

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)} .$$

განმეორებითი ცდები. ბერნულის ფორმულა

განვიხილოთ ერთი და იგივე ექსპერიმენტების სერია, რომლებიც ტარდება ერთი და იგივე პირობებში ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამასთანავე, ყოველ კონკრეტულ ექსპერიმენტში ჩვენ განვასხვავებთ მხოლოდ ორ შედეგს: გარკვეული A ხდომილების მოხდენა (რომელსაც პირობითად **„წარმატებას“** უწოდებენ) და მისი არ მოხდენა – $\overline{A}$ (რომელსაც **„მარცხს“** უწოდებენ). A ხდომილების მოხდენის ალბათობა ნებისმიერი ექსპერიმენტისათვის მუდმივია და ტოლია $P(A) = p$, სადაც $0 < p < 1$. შესაბამისად, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p := q$ $(p + q = 1)$.

ალბათობას იმისა, რომ n ექსპერიმენტში A ხდომილება მოხდა k-ჯერ გამოითვლება ე. წ. **ბერნულის ფორმულით:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} .$$

ამასთანავე, ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$P_n(k+1) = \frac{(n-k)p}{(k+1)q} P_n(k) .$$

ალბათობების ერთობლიობას $P_n(k)$, როცა $k = 0,1,..., n$ ეწოდება **ალბათობების ბინომიალური განაწილება.**

ისეთ k_0 რიცხვს, რომლის შესაბამისი ალბათობა $P_n(k_0)$ უდიდესია $P_n(0)$, $P_n(1)$,..., $P_n(n)$ ალბათობებს შორის **უალბათესი რიცხვი** ეწოდება. უალბათესი რიცხვი გვიჩვენებს n დამოუკიდებელ ცდაში წარმატებათა რა რაოდენობაა ყველაზე უფრო

მოსალოდნელი. უალბათესი რიცხვი წარმოადგენს შემდეგი უტოლობის მთელ ამონახსნს: $np-q \le k_0 \le np+p$.

პუასონის ფორმულა

თანაფარდობას $\lim_{np\to\lambda} p_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$ **პუასონის ფორმულა** ეწოდება. იგი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილების k-ჯერ მოხდენის ალბათობა (როცა n საკმაოდ დიდია, ხოლო p საკმაოდ მცირე, ამასთანავე $np=\lambda<15$) პუასონის მიახლოებითი ფორმულით: $p_n(k) \approx \lambda^k e^{-\lambda}/k!$.

ამ თავში ჩვენ შევეხებით პირობითი ალბათობის გამოყენების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ასპექტს. ძირითადი იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ როდესაც ალბათობის გამოთვლა პირდაპირი გზით საკმაოდ ძნელია, მაშინ შესაძლებელია პრობლემის გაყოფა ისეთ კერძო შემთხვევებად, სადაც პირობითი ალბათობები ადვილი გამოსათვლელია. მაგალითად, დავუშვათ, რომ თქვენ ყიდულობთ ნახმარ ავტომობილს ქალაქში, სადაც ქუჩების დატბორვა თავსხმა წვიმების შემთხვევაში ჩვეულებრივი პრობლემაა. თქვენ იცით, რომ ნახმარი ავტომობილების დაახლოებით 5% ადრე დაზიანებული იყო წყალდიდობის გამო და სპეციალისტების შეფასებით ასეთი ავტომობილების 80%-ს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები, ხოლო თუ ნახმარი ავტომობილები ადრე არ იყო დაზიანებული წყალდიდობის გამო, მაშინ ამ ავტომობილების მხოლოდ 10%-ს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ თქვენ ავტომობილს მოგვიანებით შეექმნება ძრავის პრობლემები?

ამ სიტუაციაში ცხადია, რომ ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ალბათობები ორივე განსხვავებულ შემთხვევაში: წყალდიდობით დაზიანებულ და დაუზიანებელ შემთხვევებში.

პირველ რიგში შევხედოთ ამ ამოცანას პროპორციის თვალსაზრისით. ყოველი გაყიდული 1000 ავტომობილიდან 50 არის ადრე წყალდიდობით დაზიანებული და მათი 80%-ს ანუ 40 ავტომობილს მომავალში ექნება ძრავის სერიოზული პრობლემები. 950 ავტომობილი ადრე არ იყო წყალდიდობით დაზიანებული და მათ 10%-ს ანუ 95 ავტომობილს შეიძლება შეექმნას ანალოგიური პრობლემები. შესაბამისად, ჩვენ ვღებულობთ სულ 40 + 95 = 135

ავტომობილს 1000-დან და ალბათობა იმისა, რომ მომავალში ავტომობილს შეექმნება პრობლემები იქნება 135 : 1000 = 0.135.

თუ შემოვიღებთ ხდომილებებს: $B=${წყალდიდობით დაზიანებული} და $A=${ავტომობილს შეექმნება პრობლემები}, მაშინ ვნახეთ, რომ $P(A)=0.135$. მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ $P(B)=0.05$, $P(\overline{B})=0.95$, $P(A|B)=0.8$ და $P(A|\overline{B})=0.1$ და ჩვენ მიერ გამოთვლილი ალბათობა ფაქტიობრივად არის $0.8\times0.05+0.1\times0.95=0.135$. *როგორც ვხედავთ საძიებელი ალბათობა წარმოადგენს ორი განსხვავებული შემთხვევის (წყალდიდობით დაზიანებული და დაუზიანებელი) ალბათობების შეწონილ საშუალოს, სადაც წონები არის ამ შემთხვევების შესაბამისი ალბათობები. ეს მაგალითი ახდენს სრული ალბათობის ძალიან მნიშვნელოვანი ფორმულის გამოყენების ილუსტრირებას, რომელსაც კერძო შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:*

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

მაგალითი 1. სიტყვიდან „სამშობლო“ შემთხვევით ვიღებთ ორ ასოს და შემდეგ შემთხვევით ვდებთ უკან ამ ასოებს ცარიელ ადგილებზე. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ისევ მივიღებთ სიტყვას „სამშობლო“.

ამოხსნა. განვიხილოთ ორი განსხვავებული შემთხვევა: 1) ამოღებულია ორივე „ო“, რომელ შემთხვევაშიც ნებისმიერი დაბრუნებისას მიიღება სიტყვა „სამშობლო“ და 2) ამოღებულია სხვადასხვა ასო, რომელ შემთხვევაშიც სიტყვა „სამშობლო“ მიიღება თუ ასოების დაბრუნება მოხდება მათ საწყის მდებარეობაზე. ცხადია, რომ ეს ორი შემთხვევა გამორიცხავს ერთმანეთს და ამოწურავს ყველა შესაძლებლობებს. შესაბამისად, სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენება შესაძლებელია. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აღწერის გარეშე ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ ხდომილებები:

$$A=\{\text{მიიღება სიტყვა "სამშობლო"}\} \text{ და}$$
$$B=\{\text{ორივე ასოა "ო"}\}.$$

ცხადია, რომ $P(A|B)=1$. თუ ასოები განსხვავებულია, მაშინ ისინი თავიანთ მდებარეობას დაუბრუნდება ალბათობით 1/2,

ანუ $P(A|\overline{B})=1/2$. ორი ასოს შერჩევა 8-დან შესაძლებელია $C_8^2=28$ სხვადასხვანაირად, რომელთა შორის მხოლოდ ერთ შემთხვევაში შეგვხვდება ორი „ო". შესაბამისად, $P(B)=1/28$ და $P(\overline{B})=27/28$. ამიტომ, საბოლოოდ გვექნება:

$$P(A)=\frac{1}{28}\times 1+\frac{27}{28}\times\frac{1}{2}=\frac{29}{56}.$$

მსჯელობის ეს გ ზა ხშირად საკმარისია ამოცანის ამოსხსნელად და იმავდროულად იგი თავიდან გვაცილებს ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის ზუსტად აგების პროცედურას.

მაგალითი 2. ფილტვების კიბოს განვითარების რისკი საზოგადოდ დაახლოებით 0.1%-ია, ხოლო მწეველებს შორის კი 0.4%. ცნობილია, რომ მოსახლეობის 20% მწეველია. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ არამწეველს განუვითარდება ფილტვების კიბო?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: $A=\{$განუვითარდება კიბო$\}$ და $B=\{$მწეველია$\}$. საძიებელია პირობითი ალბათობა – $P(A|\overline{B})$. ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს, რომ:

$$P(A)=0.1\%:100\%=0.001,\ P(B)=20\%:100\%=0.2,$$

$$P(\overline{B})=1-0.2=0.8,\ P(A|B)=0.4\%:100\%=0.004.$$

შევიტანოთ ეს მონაცემები სრული ალბათობის ფორმულაში და იქიდან ამოვხსნათ საძიებელი პირობითი ალბათობა. გვაქვს:

$$0.001=0.2\times 0.004+0.8\times P(A|\overline{B}),$$

საიდანაც $P(A|\overline{B})=0.00025$.

მაგალითი 3. გაქვთ ორი ყუთი და ათ-ათი ცალი შავი და თეთრი ბურთი. როგორ უნდა გადაანაწილოთ ბურთები ყუთებში ისე, რომ მაქსიმალური იყოს ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი იქნება თეთრი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A={ამოღებულია თეთრი}, B={შერჩეულია I ყუთი}. მაშინ ბურთების გადანაწილების შემდეგ

ალბათობას გამოვითვლით სრული ალბათობის ფორმულით: $P(A)=P(B)P(A\,|\,B)+P(\overline{B})P(A\,|\,\overline{B})$, სადაც $P(B)=P(\overline{B})=1/2$.

განვიხილოთ სამი შესაძლო შემთხვევა:

1) ერთ ყუთში ჩავდოთ ოცივე ბურთი, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად მივიღებთ, რომ:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot(\frac{10}{20}+0)=\frac{1}{4};$$

2) თითოეულ ყუთში განვათავსოთ 10 ბურთი. ერთ ყუთში ჩავდოთ n თეთრი ბურთი ($0\le n\le 10$), ხოლო მეორეში კი $10-n$ თეთრი ბურთი. მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$P(A)=\frac{1}{2}(\frac{n}{10}+\frac{10-n}{10})=\frac{1}{2};$$

3) ერთ ყუთში ჩავდოთ $10+k$ ($1\le k\le 9$) ბურთი, ხოლო მეორეში კი $10-k$ ბურთი. პირველ ყუთში ჩავდოთ $k+n$ ($1\le k+n\le 10$) თეთრი ბურთი, ხოლო მეორეში კი $10-k-n$ თეთრი ბურთი. მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად გვაქვს:

$$P(A)=\frac{1}{2}(\frac{k+n}{10+k}+\frac{10-k-n}{10-k})=\frac{1}{2}(\frac{k}{10+k}+1+\frac{n}{10+k}-\frac{n}{10-k})\ge\frac{1}{2}(\frac{k}{10+k}+1),$$

სადაც უკანასკნელი უტოლობა მიიღება იმ ფაქტიდან, რომ

$$\frac{n}{10+k}-\frac{n}{10-k}\le 0.$$

თუ ახლა ვისარგებლებთ თანაფარდობით $\max\limits_{1\le k\le 9}\frac{k}{10+k}=\frac{9}{19}$, მაშინ დავინახავთ, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში $P(A)$ ალბათობის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება

$$\frac{1}{2}\times(\frac{9}{19}+1)=\frac{14}{19}.$$

ყოველივე ზემოთ თქმულიდან გამომდინარე ვასკვნით, რომ საძიებელი ალბათობა მაქსიმალური იქნება, როცა ერთ ყუთში მოვათავსებთ 19 ბურთს, რომელთა შორის 9 არის თეთრი, ხოლო მეორეში კი შესაბამისად მხოლოდ ერთ თეთრ ბურთს.

შევნიშნოთ, რომ ეს ალბათობა მინიმალური იქნება, როცა ოცივე ბურთს მოვათავსებთ ერთ ყუთში.

ქვემოთ ჩვენ მოვიყვანთ ერთ მარტივ მაგალითს სათამაშო კამათლებზე, რომელშიც ერთი შეხედვით თქვენ არ უნდა გქონდეთ უპირატესობა, მაგრამ სინამდვილეში ეს ასეა.

მაგალითი 4. განვიხილოთ სამი სათამაშო კამათელი A, B და C, რომელთა წახნაგებზე შესაბამისად წერია:

კამათელი A: 1, 1, 5, 5, 5, 5
კამათელი B: 3, 3, 3, 4, 4, 4
კამათელი C: 2, 2, 2, 2, 6, 6

თამაში მიმდინარეობს შემდეგნაირად: თქვენ და თქვენი მოწინააღმდეგე დებთ თითო-თითო ლარს და თქვენ თავაზობთ მოწინააღმდეგეს აირჩიოს სათამაშო კამათელი და გააგოროს იგი. შემდგომ თქვენ ირჩევთ ერთ-ერთს დარჩენილი კამათლებიდან და აგორებთ მას. მოგებულია ის ვისაც მოუვა უფრო მაღალი ქულა. თითქოს თქვენს მოწინააღმდეგეს გააჩნია უპირატესობა, ვინაიდან იგი პირველი ირჩევს კამათელს. მაგრამ, რამდენადაც თქვენთვის ცნობილია მისი არჩევანი, ყოველთვის შეგიძლიათ ისე შეარჩიოთ მოგების ალბათობა, რომ ის მეტი იყოს 1/2-ზე. ეს აიხსნება შემდეგი გარემოებით: სათამაშო კამათლები ისეთია, რომ A კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის ვიდრე B კამათელზე; B კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის ვიდრე C კამათელზე და C კამათელზე საშუალოდ მეტი ქულა მოდის ვიდრე A კამათელზე. მართლაც, თუ აღვნიშნავთ აგრეთვე სათამაშო კამათლებზე მოსულ ქულებს შესაბამისად A, B და C ასოებით, მაშინ ცხადია, რომ

$$P(A > B) = P(A = 5) = 4/6 = 2/3,$$
$$P(B > C) = P(C = 2) = 4/6 = 2/3,$$

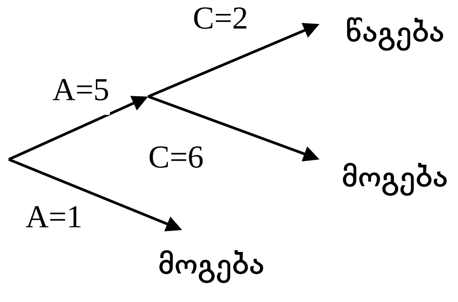
ხოლო მესამე შემთხვევისათვის ვისარგებლოთ სრული ალბათობის ფორმულით:

$$P(C > A) = P(C > A \mid A = 1)P(A = 1) + P(C > A \mid A = 5)P(A = 5) =$$

$$=1\times\frac{2}{6}+P(C=6)\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}.$$

როგორც ვხედავთ, ყველა ეს ალბათობა ნახევარზე მეტია. გასაგებია რა იქნება მეორე გამგორებლის სტრატეგია: ა) თუ პირველი აირჩევს A კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს C კამათელი; ბ) თუ პირველი აირჩევს B კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს A კამათელი; გ) თუ პირველი აირჩევს C კამათელს, მაშინ მეორემ უნდა არჩიოს B კამათელი. მართალია, თითქოს თქვენ ძალიან გულუხვი ხართ თქვენი ოპონენტის მიმართ აძლევთ რა მას უფლებას გააკეთოს პირველი არჩევანი, მაგრამ სწორედ მისი არჩევანის ცოდნა გაძლევთ უპირატესობას.

ხისებრი დიაგრამა წარმოადგენს სრული ალბათობის ფორმულის ილუსტრირების საუკეთესო საშუალებას. აქ ყოველი განსხვავებული შემთხვევა წარმოიდგინება ხის ტოტის სახით და გრძელდება მანამ სანამ არ დადგება ჩვენთვის საინტერესო დადებითი ან უარყოფითი პასუხი. თითოეულ განშტოების ალბათობა გამოითვლება მისი ტოტების შესაბამისი ალბათობების გადამრავლებით, ხოლო საძიებელი ალბათობა მიიღება განშტოებების ალბათობების შეკრებით. ქვემოთ მოყვანილია ა) შემთხვევის შესაბამისი ხისებრი დიაგრამა (დენდროგრამა):



მაგალითი 5. ორ ერთნაირი ყუთიდან ერთში მოთავსებულია a თეთრი და b შავი ბურთი, ხოლო მეორეში კი c თეთრი და d შავი ბურთი. თითოეული ყუთიდან შემთხვევით იღებენ თითო ბურთს და ათავსებენ მესამე ყუთში. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამის შემდეგ მესამე ყუთიდან ამოღებული ერთი ბურთი იქნება თეთრი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: A_i $(i=1,2)$ – i-ური ყუთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია; B – მესამე ყუთიდან ამოღებული ბურთი თეთრია. მესამე ყუთში შესაძლებელია აღმოჩნდეს: ორი თეთრი ბურთი – ხდომილება $A_1\cap A_2$; ერთი თეთრი და ერთი შავი ბურთი – ხდომილება $(A_1\cap\overline{A_2})\cup(\overline{A_1}\cap A_2)$ ან ორი შავი ბურთი – ხდომილება $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$. გასაგებია, რომ ხდომილებები $A_1\cap A_2$, $A_1\cap\overline{A_2}$, $\overline{A_1}\cap A_2$ და $\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$ ქმნის ხდომილებათა სრულ სისტემას. აღვნიშნოთ ეს ხდომილებები შესაბამისად H_1, H_2, H_3 და H_4-ით. ცხადია, რომ ხდომილებათა წყვილები A_1,A_2; $A_1,\overline{A_2}$; $\overline{A_1},A_2$ და $\overline{A_1},\overline{A_2}$ დამოუკიდებელია. ამიტომ გვაქვს:

$$P(H_1)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d};$$

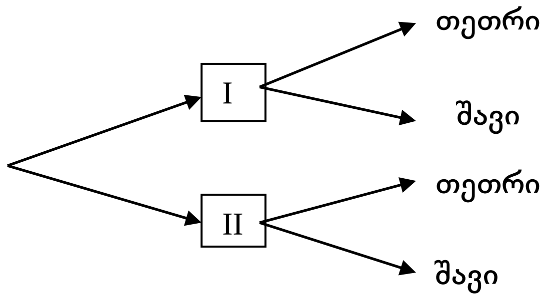
$$P(H_2)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{d}{c+d};\ P(H_3)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d};\ P(H_2)=\frac{b}{a+b}\cdot\frac{d}{c+d}.$$

გარდა ამისა, ცხადია, რომ: $P(B\,|\,H_1)=1$; $P(B\,|\,H_2)=P(B\,|\,H_3)=1/2$; $P(B\,|\,H_4)=0$. შესაბამისად, სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად, ვღებულობთ:

$$P(B)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d}\cdot 1+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{d}{c+d}\cdot\frac{1}{2}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d}\cdot\frac{1}{2}+0=\frac{2ac+ad+bc}{2(a+b)(c+d)}.$$

შენიშვნა. იგივე იქნება ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ყუთიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი თეთრია. მართლაც, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ხდომილებათა სრული სისტემა იქნება: შეირჩა I ყუთი (ავღნიშნოთ ის C_1-ით) ან შეირჩა II ყუთი (ავღნიშნოთ ის C_2-ით, ცხადია, რომ $P(C_1)=P(C_2)=1/2$), ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა გვაძლევს:

$$P(B)=P(C_1)P(B\,|\,C_1)+P(C_2)P(B\,|\,C_2)=\frac{1}{2}\cdot[\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}]=\frac{2ac+ad+bc}{2(a+b)(c+d)}.$$



ზოგჯერ ჩვენ გვჭირდება მრავალჯერადი პირობითობა. მაგალითად, $P(A|B)$ პირობითი ალბათობის გამოსათვლელად შეიძლება მომავალში საჭირო გახდეს გარკვეული C ხდომილების პირობაში მუშაობა. ვინაიდან პირობითი ალბათობა აგრეთვე ალბათობაა, აქ ახალი არაფერია, მაგრამ შესაბამისი სრული ალბათობის ფორმულა უფრო რთულად გამოიყურება. კერძოდ, ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$P(A|B) = P(A|B \cap C)P(C|B) + P(A|B \cap \overline{C})P(\overline{C}|B).$$

მაგალითი 6 *(სიმპსონის პარადოქსი).* ბერკლის უნივერსიტეტის გენდერული ტიპის კვლევებში შენიშნულ იქნა, რომ კაცები უფრო მეტად ხვდებიან დოქტორანტურაში ვიდრე ქალები. ერთი წლის შემდეგ დოქტორანტურაში მიღებულ იქნა მამაკაცების 45% და ქალების 30%. შემდგომი კვლევებისათვის შეირჩა 6 დიდი უნივერსიტეტი და დოქტორანტურა დაიყო ორ კატეგორიად; „მარტივი“ და „რთული“ იმის მიხედვით სად უფრო ადვილია და სად უფრო ძნელი დოქტორანტურაში მოხვედრა. აღმოჩნდა, რომ „რთულ“ კატეგორიაში ჩაირიცხა მამამაკაცებისა და ქალების დაახლოებით ერთი და იგივე – 26-26%. ამიტომ გადახრა კაცების სასარგებლოდ ცხადია უნდა ყოფილიყო მეორე („მარტივ“) კატეგორიაში. მაგრამ „მარტივ“ კატეგორიაში ჩარიცხულ იქნა ქალების 80 % და კაცების მხოლოდ 62%. შესაბამისად, სადღაც უნდა იყოს შეცდომა. ქვემოთ მოყვანილია დოქტორანტურის კონკურსში მონაწილე (ფრჩხილებში) და ჩარიცხული კაცებისა და ქალების რიცხვი კატეგორიების მიხედვით:

	კაცი	ქალი
„მარტივი“	864 (1385)	106 (133)
„რთული“	334 (1306)	451 (1702)
ჯამი	(2691)	(1835)

განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული კონკურსანტი. A იყოს ხდომილება, რომ კონკურსანტი ჩაირიცხება დოქტორანტურაში, ხოლო M და W – შესაბამისად, კონკურსანტი კაცი და ქალია. „რთული“ და „მარტივი“ კატეგორიები აღვნიშნოთ შესაბამისად D და E ასოებით. ცნობილია, რომ $P(A|M)=45/100=0.45$ და $P(A|W)=30/100=0.3$. ზემოთ მოყვანილი ცხრილიდან ჩანს, რომ:

$P(A|M\cap D)=334/1306\approx 0.26$, ხოლო $P(A|M\cap E)=864/1385\approx 0.62$

და

$P(A|W\cap D)=451/1702\approx 0.26$, ხოლო $P(A|W\cap E)=106/133\approx 0.80$.

როგორც ვხედავთ,

$$P(A|M\cap D)=P(A|W\cap D) \text{ და } P(A|M\cap E)<P(A|W\cap E),$$

მაგრამ $P(A|M)>P(A|W)$, ანუ ჩარიცხვის პირობითი ალბათობები ქალებისათვის ორივე კატეგორიაშია იგივეა ან უფრო მაღალია ვიდრე კაცებისათვის, მაშინ როდესაც კატეგორიების გარეშე ჩარიცხვის პირობითი ალბათობები ქალებისათვის უფრო დაბალია. ნათელია, რომ აქ შეცდომა არ არის, მაგრამ ეს ჯერ კიდევ გამოიყურება პარადოქსალურად. ამ ფაქტის ასახსნელად ვისარგებლოთ სრული ალბათობის ფორმულით პირობითი ალბათობისათვის, რომლის თანახმად:

$$P(A|W)=P(A|W\cap D)P(D|W)+P(A|W\cap E)P(E|W),$$

$$P(A|M)=P(A|M\cap D)P(D|M)+P(A|M\cap E)P(E|M)$$

და ვხვდებით, რომ „წინააღმდეგობის“ საფუძველია პირობითი ალბათობები – $P(D|W)$, $P(E|W)$, $P(D|M)$ და $P(E|M)$, სადაც ასახულია თუ როგორ ირჩევენ კაცები და ქალები თავიანთ კატეგორიებს. ალბათობა იმისა, რომ კაცი აირჩევს „რთულ“ და „მარტივ“ კატეგორიას არის შესაბამისად:

$$P(D|M)=1306/2691\approx 0.49 \text{ და } P(E|M)\approx 0.51,$$

ხოლო ქალებისათვის შესაბამისი ალბათობები იქნება:

$$P(D|W)=1702/1835\approx 0.93 \text{ და } P(E|W)\approx 0.07.$$

ამგვარად, ქალები თითქმის ყოველთვის ირჩევენ „რთულ“ კატეგორიას, მაშინ როდესაც კაცები დაახლოებით ერთნაირად ირჩევენ „რთულ“ და „მარტივ“ კატეგორიებს და სწორედ ამაში მდგომარეობს პარადოქსის ამოხსნა.

ახლა განვიხილოთ სიტუაცია, როცა ცნობილია პირობითი ალბათობები ერთი მიმართულებით და გამოსათვლელია „შებრუნებული“ პირობითი ალბათობები. შესაბამის შედგეს წარმოადგენს ბაიესის ფორმულა, რომელიც მიიღება ნამრავლის ალბათობისა და სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით და რომელსაც კერძო შემთხვევაში აქვს სახე:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(\bar{B})P(A \mid \bar{B})}.$$

მაგალითი 7. სიცრუის დეტექტორი (პოლიგრაფი) 95 % შემთხვევაში იძლევა ზუსტ პასუხს. ცნობილია, რომ საშუალოდ ყოველი ათასი ადამიანიდან ერთი ცრუობს. განვიხილოთ შემთხვევით შერჩეული ადამიანი, რომელიც გადის ტესტირებას დეტექტორზე და რომელსაც გადაწყვეტილი აქვს იცრუოს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ დეტექტორი აღმოაჩენს, რომ ის ცრუობს?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: L={ადამიანი ცრუობს}, L_P={დეტექტორმა დაადგინა რომ ადამიანი ცრუობს}. ამოცანის პირობის თანახმად $P(L) = 1/1000 = 0.001$ და $P(L_p \mid L) = P(\overline{L_p} \mid \bar{L}) =$ $= 95/100 = 0.95$. საძიებელია პირობითი ალბათობა $P(L \mid L_P)$, რომელიც ბაიესის ფორმულის თანახმად იქნება:

$$P(L \mid L_P) = \frac{P(L)P(L_P \mid L)}{P(L)P(L_P \mid L) + P(\bar{L})P(L_P \mid \bar{L})} = \frac{0.95 \times 0.001}{0.95 \times 0.001 + 0.05 \times 0.999} \approx 0.02.$$

ალბათობის თეორია განსაკუთრებით ხშირად გამოიყენება სამართალწარმოებაში, როცა მტკიცებეულებებში ფიგურირებს ადამიანის „დნმ“. განვიხილოთ ე. წ. კუნძულის ამოცანა.

მაგალითი 8. (კუნძულის ამოცანა). კუნძულზე მოკლეს ადამიანი და მკვლელი უნდა იყოს კუნძულის დარჩენილი n მცხოვრებიდან ერთ-ერთი. დანაშაულის ადგილის შესწავლისას გაკეთებულმა „დნმ“-ს ანალიზმა აჩვენა, რომ მკვლელს გააჩნია გან-

საკუთრებული გენოტიპი, რომელიც ცნობილია და მთელ მოსახლეობაში გვხვდება p პროპორციით. ვიგულისხმოთ, რომ კუნძულის მცხოვრებთა გენოტიპები დამოუკიდებელია. გამომძიებელმა დაიწყო კუნძულის მცხოვრებთა გენოტიპების შემოწმება. პირველი ვინც შეამოწმეს იყო ბატონი ზეზვა და მას აღმოაჩნდა მკვლელის გენოტიპი. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილობები: C={ბატონი ზეზვა დამნაშვეა} და D={ბატონი ზეზვას გენოტიპი აღმოჩენილია მკვლელობის ადგილზე}. საძიებელია პირობითი ალბათობა $P(C\,|\,D)$, რომლის გამოსათვლელად უნდა ვისარგებლოთ ბაიესის ფორმულით, სადაც დაგვჭირდება როგორც $P(C)$-ს, ისე „პირდაპირი“ პირობითი ალბათობების ცოდნა. $P(C)$ არის ალბათობა იმისა, რომ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა მანამ სანამ გენოტიპების შემოწმება დაწყებულა და, თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ არანაირი მიზეზი არ არსებობს იმისა, რომ რომელიმე პერსონაში მეტი ეჭვი შევიტანოთ ვიდრე სხვა რომელიმეში, მაშინ ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ $P(C)=1/n$. თუ ბატონი ზეზვა დამნაშავეა, მაშინ მისი გენოტიპი აუცილებლად აღმოჩნდება დანაშაულის ადგილზე და, შესაბამისად, $P(D\,|\,C)=1$. თუკი ბატონი ზეზვა უდანაშაულოა, მაშინ მისი გენოტიპი ისევ შეიძლება აღმოჩნდეს დანაშაულის ადგილზე იმ ალბათობით რა პროპორციითაც გვხვდება აღნიშნული გენოტიპი საზოგადოდ ადამიანთა პოპულაციაში, ანუ $P(D\,|\,\overline{C})=p$. ამიტომ:

$$P(C\,|\,D)=\frac{1\times(1/n)}{1\times(1/n)+p\times(1-1/n)}=\frac{1}{1+(n-1)p}.$$

შემდეგი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ სხვადასხვა მიდგომამ შეიძლება სხვადასხვა პასუხამდე მიგვიყვანოს.

მაგალითი 9. თქვენ იცით რომ თქვენს ახალ მეზობელს ჰყავს ორი შვილი. ერთ ღამეს თქვენ ფანჯარას ესროლეს ქვა და დაინახეთ ბავშვი, რომელმაც თქვენი ბაღიდან შეირბინა მეზობლის სახლში. სიბნელე იყო და თქვენ მხოლოდ ის გაარჩიეთ, რომ ბავშვი ბიჭი იყო. მეორე დღეს დარეკეთ მეზობლის კარებზე და კარი გაგიღოთ ბიჭმა. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ეს ბიჭი დამნაშავეა?

ამოხსნა. ამოვხსნათ ეს ამოცანა ორი გზით. **პირველი მიდგომა:** თუ მეზობლის მეორე შვილი გოგოა, მაშინ თქვენ იცით, რომ დამნაშავე ბიჭია, ხოლო თუ მეზობლის მეორე შვილიც ბიჭია, მაშინ ბიჭი რომელმაც კარი გაგიღოთ თანაბარი ალბათობებით შეიძლება იყოს დამნაშავეც და უდანაშაულოც. ამიტომ, თუ შემოვიღებთ ხდომილებას $C=${ბავშვი, რომელმაც გააღო კარი, დამნაშავეა}, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად მივიღებთ, რომ:

$$P(C)=P(\text{ბიჭი})P(C\,|\,\text{ბიჭი})+P(\text{გოგო})P(C\,|\,\text{გოგო})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{4}.$$

მეორე მიდგომა: შევნიშნოთ, რომ ეს ამოცანა ანალოგიურია ე. წ. კუნძულის ამოცანის, სადაც გენოტიპი შეცვლილია სქესით, ხოლო ბატონი ზეზვა კი ბავშვით, რომელმაც კარი გააღო. ამ შემთხვევაში ჩვენ გვაქვს: $n=2$ და $p=1/2$ და, შესაბამისად,

$$P(C)=\frac{1}{1+(n-1)p}=\frac{1}{1+(2-1)\times(1/2)}=\frac{2}{3}.$$

განსხვავებულმა მიდგომებმა მოგვცა განსხვავებული შედეგები! როგორც წესი, საჭიროა ძალიან დიდი სიფრთხილე პირობაში მდგომი ხდომილებების შერჩევისას. დავუშვათ, რომ ნებისმიერი ბავშვი ერთნაირი ალბათობით წყვიტავს გავიდეს თავისი ეზოდან და ქვა ესროლოს თქვენს ფანჯარას და ნებისმიერი ბავშვი ერთნაირი ალბათობით აღებს კარს. ორი ბავშვის სქესის ნებისმიერი კომბინაციისათვის, ჩვენ შეგვიძლია შემთხვევით ისე შევარჩიოთ ვინ დამნაშავეა და ვინ აღებს კარს, რომ სქესის ნებისმიერი კომბინაცია დაიყოს ოთხ ერთნაირად შესაძლებელ შემთხვევად. ბიჭი და გოგო აღვნიშნოთ შესაბამისად b და g ასოებით, ბავშვი რომელმაც გააღო კარი აღვნიშნოთ ქვედა ინდექსით d, ხოლო ბავშვი რომელიც დამნაშავეა – ზედა ინდექსით c. ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შედგება 16 ერთნაირად შესაძლებელი ელემენტარული ხდომილებისაგან:

$$\Omega=\{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, b b_d^c, b_d^c g, b_d g^c, b^c g_d, b g_d^c, g_d^c b, g_d b^c,$$
$$g^c b_d, g b_d^c, g_d^c g, g_d g^c, g^c g_d, g g_d^c\}$$

და ხდომილება – ბავშვი, რომელმაც კარი გააღო დამნაშავე არის:

$$C = \{b_d^c b, bb_d^c, b_d^c g, bg_d^c, g_d^c b, gb_d^c, g_d^c g, gg_d^c\}.$$

რომელი ხდომილება უნდა განვიხილოთ პირობაში? ჩვენ ვიცით ორი რამ: დამნაშავე ბავშვი ბიჭია და ბიჭმა გააღო კარი. ეს ხდომილებებია შესაბამისად:

$$A = \{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b^c g_d, g_d b^c, gb_d^c\},$$

$$B = \{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, b_d g^c, g^c b_d, gb_d^c\}$$

და პირობაში ჩვენ უნდა განვიხილოთ მათი თანაკვეთა:

$$A \cap B = \{b_d^c b, b_d b^c, b^c b_d, bb_d^c, b_d^c g, gb_d^c\}.$$

ვინაიდან ოთხი ამ 6 ელემენტარული ხდომილებიდან არის C-ში და Ω-ს ყველა ელემენტარული ხდომილება ერთნაირად მოსალოდნელია, ამიტომ:

P\{ბავშვი, რომელმაც გააღო კარი, დამნაშავეა\} = $\mathrm{P}(\mathrm{C}|\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 2/3$,

რაც შესაბამისობაშია ე. წ. კუნძულის ამოცანასთან.

გამოდის, რომ პირველი მიდგომა გვაძლევს მცდარ ამოხსნას. ისმის კითხვა – რატომ? როცა ჩვენ ვითვლიდით ალბათობებს P(ბიჭი) და P(გოგო), ჩვენ არაცხადად ვიხილავდით პირობაში B ხდომილებას, მაგრამ დაგვავიწყდა A პირობა. ალბათობა P(ბიჭი) უნდა გამოგვეთვალა როგორც

$$P(\text{მეორე ბავშვი ბიჭია} \mid \mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{3}$$

და არა 1/2. როგორც ვხედავთ, პირობითი ალბათობა იმისა, რომ მეორე ბავშვი ბიჭია უფრო მაღალია ახლა, როცა ვიცით, რომ დამნაშავე ბავშვი ბიჭია. *პირობის დადგენა საკმაოდ ფაქიზი საკითხია და საჭიროა, რომ პირობა იყოს არსებული ინფორმაციის სრულიად ადეკვატური, არც მეტი და არც ნაკლები.* ახლა ჩამოვაყალიბებთ პირველი ამოხსნის კორექტულ ვერსიას – ყველაფერი უნდა გამოითვალოს $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ხდომილების პირობაში და გვექნება:

$$P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{3}.$$

მაგალითი 10 (ასოების ამოცნობა). გვაქვს ასოების ორი ერთობლიობა:

I={К, И, З, Н} და II={З, Ч, Н}.

შემთხვევით ვირჩევთ ერთ ერთობლიობას და არჩეული ერთობლიობიდან ერთ ასოს. ამორჩეულ ასოს ძალიან მცირე დროის განმავლობაში ვუჩვენებთ დამკვირვებელს (ისე რომ მას არ შეუძლია მთლიანად აღიქვას ასო). როგორია ასოს სწორად გამოცნობის ალბათობა, თუ დამკვირვებელის პასუხია „Н“, როცა ის ასოს გამოსახულებაში დაინახავს ვერტიკალურ ხაზს და პასუხია „З“, როცა ასოს გამოსახულებაში ვერტიკალური ხაზი არ არის?

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები:

$$\mathrm{A_i}=\{\text{ამორჩეულია } \mathrm{i}-\text{ური ერთობლიობა}, \mathrm{i}=1,2\};$$

„К“, „И“, „З“, „Н“ და „Ч“ – იყოს ხდომილება, რომ წარმოდგენილია შესაბამისად К, И, З, Н და Ч ასოები;

$$B=\{\text{დამკვირვებელმა სწორად უპასუხა}\}.$$

ამოცანის პირობებში ცხადია:

$$P(A_1)=P(A_2)=1/2;$$

$$P(\text{"К"}|A_1)=P(\text{"И"}|A_1)=P(\text{"З"}|A_1)=P(\text{"Н"}|A_1)=1/4,\quad P(\text{"Ч"}|A_1)=0;$$

$$P(\text{"З"}|A_2)=P(\text{"Ч"}|A_2)=P(\text{"Н"}|A_2)=1/3,\quad P(\text{"К"}|A_2)=P(\text{"И"}|A_2)=0.$$

ვინაიდან A_1 და A_2 ხდომილებათა სრულ სისტემას ქმნიან, ამიტომ თითოეული ასოს სწორად ამოცნობის ალბათობა შეგვიძლია გამოვთვალოთ სრული ალბათობის ფორმულით:

$$P(\text{"К"})=P(A_1)\,P(\text{"К"}|A_1)+P(A_2)\,P(\text{"К"}|A_2)=1/8;$$

$$P(\text{"И"})=P(A_1)\,P(\text{"И"}|A_1)+P(A_2)\,P(\text{"И"}|A_2)=1/8;$$

$$P(\text{"З"})=P(A_1)\,P(\text{"З"}|A_1)+P(A_2)\,P(\text{"З"}|A_2)=7/24;$$

$$P(\text{"Н"})=P(A_1)\,P(\text{"Н"}|A_1)+P(A_2)\,P(\text{"Н"}|A_2)=7/24;$$

$$P(\text{"Ч"})=P(A_1)\,P(\text{"Ч"}|A_1)+P(A_2)\,P(\text{"Ч"}|A_2)=1/6.$$

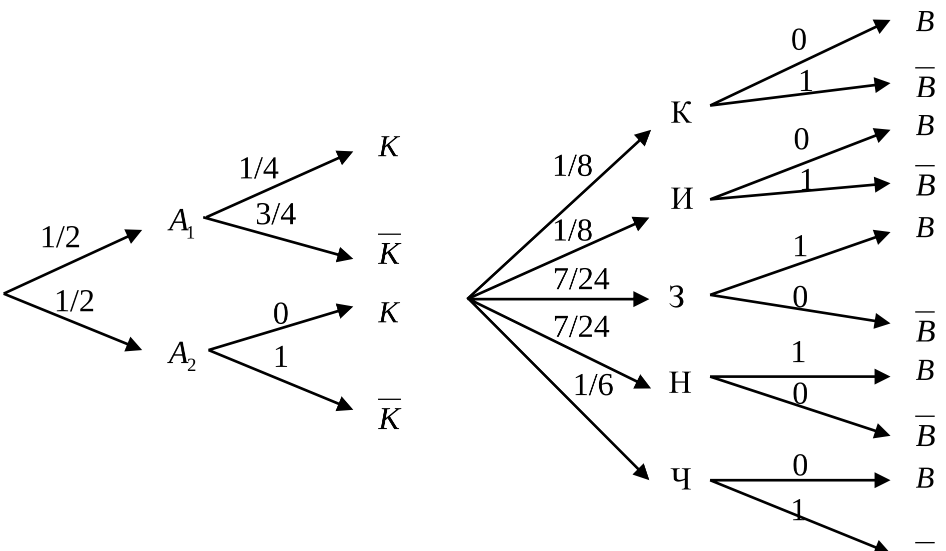
ამოცანის პირობებში აგრეთვე ცხადია, რომ სწორი პასუხის პირობითი ალბათობები სხვადასხვა ასოების წარმოდგენის შემთხვევაში შესაბამისად იქნება:

$P(B|\text{"К"}) = P(B|\text{"И"}) = P(B|\text{"Ч"}) = 0$ და $P(B|\text{"З"}) = P(B|\text{"Н"}) = 1.$

ვინაიდან, "К", "И", "З", "Н" და "Ч" აგრეთვე ხდომილებათა სრული სისტემაა, ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა გვაძლევს სწორი პასუხის ალბათობას:

$$P(B) = P(\text{"К"})P(B|\text{"К"}) + P(\text{"Н"})P(B|\text{"Н"}) + P(\text{"И"})P(B|\text{"И"}) +$$
$$+ P(\text{"З"})P(B|\text{"З"}) + P(\text{"Ч"})P(B|\text{"Ч"}) = P(\text{"Н"}) + P(\text{"З"}) = 7/12.$$

შესაბამის დენდროგრამას ექნება შემდეგი სახე:



მაგალითი 11. მაღაზიაში შემოსული ტელევიზორების შესაბამისად 2, 5 და 3 ნაწილი დამზადებულია I, II და III ფირმის მიერ. საგარანტიო დროის განმავლობაში I, II და III ფირმის მიერ შემოტანილი ტელევიზორი მოითხოვს რემონტს შესაბამისად 15%, 8% და 6% შემთხვევებში. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ მაღაზიის მიერ გაყიდული ტელევიზორი საგარანტიო დროის განმავლობაში მოითხოვს რემონტს (ხდომილება B).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებათა სრული სისტემა: A_i – გაყიდული ტელევიზორი დამზადებულია i-ური ფირმის მიერ $(i=1, 2, 3)$. პირობის თანახმად მაღაზიაში არსებული ტელევი-

ზორებიდან I, II და III ფირმის მიერ დამზადებულია შესაბამისად $2x$, $5x$ და $3x$ ტელევიზორი. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად:

$$P(A_1) = 2x/10x = 1/5,\ P(A_2) = 5x/10x = 1/2,$$
$$P(A_3) = 3x/10x = 3/10.$$

გარდა ამისა, ამოცანის პირობის თანახმად გვაქვს:

$$P(B \mid A_1) = 15/100 = 0.15,\ P(B \mid A_2) = 8/100 = 0.08,$$
$$P(B \mid A_3) = 6/100 = 0.06.$$

საბოლოოდ, სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად, ვღებულობთ:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = \frac{1}{5}\cdot 0.15 + \frac{1}{2}\cdot 0.08 + \frac{3}{10}\cdot 0.06 = 0.088.$$

მაგალითი 12. პაციენტის ნახვის შემდეგ ექიმს მიაჩნია, რომ თანაბრად შესაძლებელია ორი ავადმყოფობიდან ერთ-ერთი: X ან Y. დიაგნოზის დასაზუსტებლად პაციენტს აგზავნიან ანალიზზე, რომლის შედეგი X ავადმყოფობის დროს დადებით რეაქციას იძლევა 30% შემთხვევაში, ხოლო Y ავადმყოფობის დროს კი 20% შემთხვევაში. ანალიზმა მოგვცა დადებითი რეაქცია (ხდომილება B). რომელი ავადმყოფობაა უფრო ალბათური?

ამოხსნა. ხდომილებათა სრულ სისტემას ქმნის ხდომილებები: A_1= {პაციენტს აქვს X ავადმყოფობა}, A_2={პაციენტს აქვს Y ავადმყოფობა}. ამასთანავე, $P(A_1) = P(A_2) = 0.5$. გარდა ამისა, $P(B \mid A_1) = 30/100 = 0.3$ და $P(B \mid A_2) = 20/100 = 0.2$ ამიტომ ბაიესის ფორმულა გვაძლევს:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)} = \frac{0.15}{0.25} = 0.6,$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4.$$

ვინაიდან $P(A_1 \mid B) > P(A_2 \mid B)$, ამიტომ X ავადმყოფობა უფრო ალბათურია.

მაგალითი 13. კლუბის წევრებმა უნდა აირჩიონ კლუბის პრეზიდენტი. ალბათობა იმისა, რომ არჩეული იქნება ბექა, ნიკა ან ლუკა შესაბამისად არის 0.3, 0.5 და 0.2. თუ აირჩევენ ბექას, ნიკას ან ლუკას, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ გაიზრდება კლუბის საწევრო გადასახადი შესაბამისად არის 0.8, 0.1 და 0.4. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ კლუბის პრეზიდენტად არჩეულ იქნა ლუკა, თუ ცნობილია, რომ საწევრო გადასახადი გაიზარდა.

ამოხსნა. განვიხილოთ ხდომილებები: A_1, A_2, A_3 − კლუბის პრეზიდენტად არჩეულ იქნა ბექა, ნიკა, ლუკა; B − საწევრო გადასახადი გაიზარდა. ცხადია, რომ A_1, A_2, A_3 ხდომილებები ქმნის ხდომილებათა სრულ სისტემას და ბაიესის ფორმულის თანახმად საძიებელი ალბათობა გამოითვლება ფორმულით

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3)P(B \mid A_3)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3)}.$$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე გვაქვს:

$$P(A_1) = 0.3, P(A_2) = 0.5, P(A_3) = 0.2;$$
$$P(B \mid A_1) = 0.8,\ P(B \mid A_2) = 0.1,\ P(B \mid A_3) = 0.4.$$

ამიტომ

$$P(A_3 \mid B) = \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.3 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.4} = \frac{0.08}{0.24 + 0.05 + 0.08} = \frac{8}{37}.$$

მაგალითი 14. სისტემა შედგება პარალელურად შეერთებული ორი ელემენტისაგან საიმედოობით p_1 და p_2, რომლებიც მწყობრიდან გამოდიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. სისტემა მუშაობს თუ ერთი ელემენტი მაინც მუშაობს. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ არ მუშაობს I ელემენტი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A − I ელემენტი მუშაობს, B − II ელემენტი მუშაობს, C − სისტემა მუშაობს. ამოცანის პირობის თანახმად: $C = A \cup B$, $P(A) = p_1$ და $P(B) = p_2$. შესაბამისად, ალბათობის ცნობილი თვისებების თანახმად, გვაქვს:

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P[\overline{(A \cup B)}] = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

ამიტომ პირობითი ალბათობის განმარტებისა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით, თუ გათვალისწინებთ, რომ $P(C\,|\,\overline{A}) = P(B) = p_2$, ადვილად მივიღებთ, რომ:

$$P(\overline{A}\,|\,C) = \frac{P(\overline{A} \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\overline{A})P(C\,|\,\overline{A})}{P(C)} = \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

მაგალითი 15. მოქალაქემ იპოვა სხვისი საკრედიტო ბარათი, რომლის კოდი ოთხციფრიანია. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ მოქალაქეს ეყოფა ორი მცდელობა კოდის გამოსაცნობად (მეტ შესაძლებლობას ბანკომატი არ იძლევა).

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i $(i=1,2)$ – მოქალაქემ პირველად კოდი გამოიცნო i-ური მცდელობისას. მაშინ საძიებელი ხდომილება იქნება $A = A_1 \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$. ვინაიდან A_1 და $\overline{A_1}$ ხდომილებები არათავსებადია, მითუმეტეს არათავსებადი იქნება ხდომილებები A_1 და $\overline{A_1} \cap A_2$. ამიტომ ხდომილებათა ჯამისა და ნამრავლის ალბათობების ფორმულების თანახმად გვაქვს:

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2\,|\,\overline{A_1}),$$

სადაც

$$P(A_1) = 1/10^4,\ P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - 1/10^4,\ P(A_2\,|\,\overline{A_1}) = 1/(10^4 - 1).$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P(A) = 1/10^4 + (1 - 1/10^4)\cdot[1/(10^4-1)] = 2/10^4.$$

მონტი ჰოლის პარადოქსი: წარმოიდგინეთ, რომ თქვენ მონაწილეობთ თამაშში, რომელშიც თქვენ იმყოფებით სამი კარის წინ. წამყვანი, რომლის შესახებაც ცნობილია, რომ ის პატიოსანია, შემთხვევით ათავსებს ერთი კარის უკან ავტომობილს, ხოლო დანარჩენი ორი კარის უკან თითო ველოსიპედს. წამყვანი გეუბნებათ: „თავიდან თქვენ ირჩევთ ერთ კარს, მერე მე გაგიღებთ დარჩენილი ორიდან ერთ კარს, რომლის უკან დგას ველოსიპედი. შემდეგ თქვენ შეგიძლიათ თავიდან გააკეთოთ კარის არჩევანი: ან აირჩიოთ სხვა კარი ან არ შეცვალოთ პირვანდელი არჩევანი. ამის შემდეგ წამყვანი აღებს თქვენ მიერ საბოლოოდ

შერჩეულ კარს და იგებთ იმას, რაც ამ კარის უკანაა“. გაიზრდება თუ არა თქვენი შანსი მოიგოთ ავტომობილი, თუ შეცვლით პირვანდელ არჩევანს?

თავიდან ალბათობა იმისა, რომ თქვენ აირჩევთ კარს, რომლის უკან დგას ავტომობილი არის 1/3. მას შემდეგ რაც წამყვანი გააღებს კარს, რომელშიც დგას ველოსიპედი, ადამიანების უმრავლესობა თვლის, რომ ავტომობილის მოგების ალბათობა 1/2-ია, მაგრამ ეს ასე არ არის. წამყვანმა იცის, სად დგას ავტომობილი და ამიტომ არ აღებს იმ კარს, სადაც დგას ავტომობილი.

სწორი პასუხია: *დიახ, ავტომობილის მოგების შანსები ორჯერ გაიზრდება, თუ მოთამაშე შეცვლის პირვანდელ არჩევანს. ამის ყველაზე მარტივი ახსნა შემდეგში მდგომარეობს:* იმისათვის, რომ მოიგოთ ავტომობილი პირვანდელი არჩევანის შეცვლის გარეშე თქვენ თავიდანვე უნდა გამოიცნოთ ის კარი რომლის უკან დგას ავტომობილი. ამის ალბათობა 1/3-ია. თუკი თქვენ თავიდან აირჩევთ იმ კარს, რომლის უკანაც დგას ველოსიპედი (ამის ალბათობაა 2/3, რადგანაც არის ორი ველოსიპედი და ერთი ავტომობილი), მაშინ პირვანდელი არჩევანის შეცვლის შემთხვევაში თქვენ ცალსახად მოიგებთ ავტომობილს, რადგანაც დარჩენილი იქნებოდა ავტომობილი და ერთი ველოსიპედი და წამყვანმა გააღო ის კარი, რომლის უკანაც იდგა ველოსიპედი.

ამოხსნა. შემოვიღოთ ხდომილებები: A_i – ავტომობილი დგას i-ური კარის უკან ($i=1,2,3$); C — მოთამაშის პირვანდელი არჩევანია კარი 1; D – წამყვანმა გააღო კარი 3, სადაც აღმოჩნდა ველოსიპედი; B – მოთამაშის პირვანდელი არჩევანია კარი 1, ხოლო წამყვანმა გააღო კარი 3, სადაც აღმოჩნდა ველოსიპედი. ცხადია, რომ $B=C\cap D$.

პირობითი ალბათობის განმარტებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ:

$$P(B\,|\,A_i)=P(C\cap D\,|\,A_i)=P(D\,|\,C\cap A_i)P(C\,|\,A_i).$$

ამიტომ ბაიესის ფორმულა შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$P(A_i\,|\,B)=\frac{P(D\,|\,C\cap A_i)P(C\,|\,A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{3}P(D\,|\,C\cap A_j)P(C\,|\,A_j)P(A_j)}.$$

მოთამაშის პირვანდელი არჩევანი არაა დამოკიდებული თუ რომელი კარის უკან დგას სინამდვილეში ავტომობილი (მან არ იცის სად დგას ავტომობილი) ანუ C და A_i (i=1,2,3) დამოუკიდებელი ხდომილებებია. შესაბამისად, $P(C \mid A_1) = P(C \mid A_2) = P(C \mid A_3) = P(C)$. ამ ფაქტის გათვალისწინებით, წილადის $P(C)$ -ზე შეკვეცის შემდეგ, ბაიესის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j) P(A_j)}.$$

თუ მოთამაშემ აირჩია კარი 1, ხოლო ავტომობილი დგას კარი 2-ის უკან, მაშინ წამყვანი ვალდებულია გააღოს (აუცილებლად გააღებს) კარი 3, ანუ $P(D \mid C \cap A_2) = 1$. თუ მოთამაშემ აირჩია კარი 1, ხოლო ავტომობილი დგას კარი 3-ის უკან, მაშინ წამყვანს არ შეუძლია გააღოს (არ გააღებს) კარი 3, ანუ $P(D \mid C \cap A_3) = 0$. თუ მოთამაშემ აირჩია კარი 1 და ავტომობილი დგას ამ კარის უკან, მაშინ უნდა ჩავთვალოთ, რომ წამყვანი ვალდებულია შემთხვევით (ანუ თანაბარი ალბათობით) გააღოს ერთ-ერთი 2 და 3 კარიდან, ანუ $P(D \mid C \cap A_1) = 1/2$ (სწორედ ამაში გამოიხატება წამყვანის „პატიოსნება“). გარდა ამისა, ითვლება რომ ავტომობილი თანაბარი ალბათობით დგას ნებისმიერი კარის უკან ანუ $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. უკანასკნელი დაშვების შემდეგ ბაიესის ფორმულა მიიღებს სახეს:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_i)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)}.$$

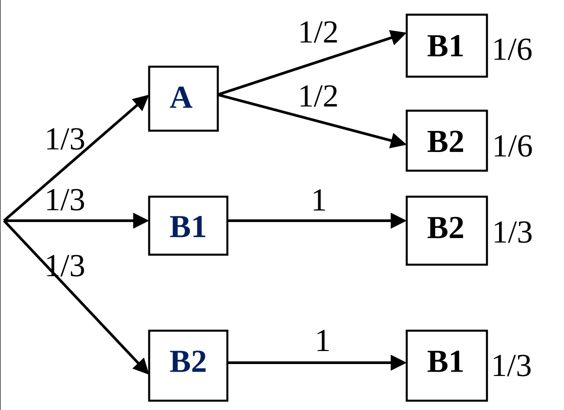
ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_1)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)} = \frac{1/2}{1/2 + 1 + 0} = 1/3,$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_2)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)} = \frac{1}{1/2 + 1 + 0} = 2/3,$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{P(D \mid C \cap A_3)}{\sum_{j=1}^{3} P(D \mid C \cap A_j)} = \frac{0}{1/2+1+0} = 0.$$

იგივე შედეგამდე ჩვენ შეგვიძლია მივიდეთ დენდროგრამე-ბის გამოყენებით (ქვემოთ სიმბოლოთი A აღნიშნულია ავტო-მობილი, ხოლო სიმბოლოებით $B1, B2$ კი – შესაბამისად I და II ველოსიპედი):

<table>
<tr><th></th><th>მოთამაშემ აირჩია</th><th>წამყვანმა გახსნა</th><th>არ შეიცვალა I არჩევანი</th><th>შეიცვალა I არჩევანი</th></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="4">
</td><td>A</td><td>B1</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B2</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>A</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>A</td></tr>
</table>

იმ შემთხვევაში, როცა მოთამაშე თავიდან ირჩევს ავტომო-ბილს, პირვანდელი არჩევანის შეცვლა იწვევს ავტომობილის წაგებას, ხოლო თუ თავიდან არჩეულ იქნა ველოსიპედი, მაშინ არჩევანის შეცვლა იწვევს ავტომობილის მოგებას. ჯამური ალ-ბათობა იმისა, რომ პირვანდელი არჩევანის შეცვლა მიგვიყვანს ავტომობილის მოგებამდე ტოლია:

$$\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3},$$

ხოლო ალბათობა იმისა, რომ პირვანდელი არჩევანის არ შეცვლა მიგვიყვანს ავტომობილის მოგებამდე ტოლია:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

მაგალითი 16 (მოთამაშის გაკოტრებაზე). განვიხილოთ ე. წ. „გერბი-საფასურის" თამაში: თუ მონეტის აგდებისას მოვა მოთამაშის მიერ წინასწარ დასახელებული მონეტის მხარე, მაშინ იგი იგებს 1 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი აგებს 1 ლარს. ვთქვათ, მოთამაშის საწყისი კაპიტალი შეადგენს x ლარს და მისი მიზანია მიიყვანოს ეს თანხა a ლარამდე. თამაში გრძელდება მანამ სანამ მოთამაშე არ მიიყვანს თავის თანხას წინასწარ განსაზღრულ a ლარამდე, ან იგი არ გაკოტრდება (ანუ წააგებს მის ხელთ არსებულ მთელ x ლარს). როგორია ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშე გაკოტრდება?

ამოხსნა. ეს ალბათობა დამოკიდებული იქნება საწყის x კაპიტალზე. აღვნიშნოთ იგი $p(x)$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ იგი განმარტებულია ნებისმიერი $0 \le x \le a$, ამასთანავე $P(0)=1$ და $P(a)=0$. შემოვიღოთ ხდომილებები:

A_1 ={მოთამაშემ მოიგო პირველ ნაბიჯზე},

B ={მოთამაშე, რომელსაც გააჩნია საწყისი კაპიტალი x, გაკოტრდება}.

ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A_1) = P(\overline{A_1}) = 1/2,\ P(B \mid A_1) = p(x+1) \text{ და}$$
$$P(B \mid \overline{A_1}) = p(x-1)\ (1 \le x \le a-1).$$

ვინაიდან, A_1 და $\overline{A_1}$ ხდომილებათა სრული სისტემაა, ამიტომ სრული ალბათობის ფორმულა $p(x)$ ალბათობისათვის გვაძლევს შემდეგ განტოლებას:

$$p(x) = \frac{1}{2}p(x+1) + \frac{1}{2}p(x-1),\ 1 \le x \le a-1$$

ამ ტიპის განტოლებებს მათემატიკაში **რეკურენტულ განტოლებებს** უწოდებენ. შეიძლება შემოწმდეს, რომ ამ განტოლების ამოხსნას აქვს სახე:

$$p(x) = bx + c,$$

სადაც b და c – ნებისმიერი მუდმივებია. ამ კოეფიციენტების მოსაძებნად უნდა ვისარგებლოთ სასაზღვრო პირობებით $P(0)=1$ და $P(a)=0$. მაშინ მივიღებთ, რომ

$$c = 1 \text{ და } ab + c = 0,$$

საიდანაც, $b = -1/a$ და საბოლოოდ $p(x) = 1 - x/a$, $0 \le x \le a$.

დავალება. დავუშვათ, რომ შესამოწმებელი ჯგუფის 1% ავადმყოფია, ხოლო დანარჩენი 99% კი ჯანმრთელი. ადამიანების შერჩევა ხდება შემთხვევით და ამიტომ

$P(\text{ავადმყოფი}) = 1\% = 0.01$ და $P(\text{ჯანმრთელი}) = 99\% = 0.99$.

ვიგულისხმოთ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ადამიანს, რომელსაც არა აქვს ავადმყოფობა, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივიღოთ მცდარი დადებითი შედეგი, ე.ი.

$$P(\text{დადებითი} \mid \text{ჯანმრთელი}) = 1\% \text{ და}$$
$$P(\text{უარყოფითი} \mid \text{ჯანმრთელი}) = 99\%.$$

დაბოლოს, დავუშვათ, რომ იმ შემთხვევაში, როცა ტესტირება უტარდება ავადმყოფ ადამიანს, მაშინ 1%-ია ალბათობა იმისა, რომ მივიღოთ მცდარი უარყოფითი შედეგი, ე.ი.

$$P(\text{უარყოფითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 1\% \text{ და}$$
$$P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 99\%.$$

გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ: ა) ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი; ბ) ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; გ) ადამიანი ჯანმრთელია, ხოლო ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი; დ) ადამიანი ავადმყოფია, ხოლო ტესტმა აჩვენა უარყოფითი შედეგი.

განვიხილოთ რეალური სიტუაცია, რომელიც გვიჩვენებს ერთი შეხედვით მოულოდნელ განსხვავებას $P(A|B)$ ***და*** $P(B|A)$ ***პირობით ალბათობებს შორის.*** *იმისათვის, რომ გამოვავლინოთ სერიოზული ავადმყოფობის მქონე ადამიანები ადრეულ სტადიაზე, ხდება ადამიანების დიდი ჯგუფის ტესტირება. მიუხედავად წინასწარი შემოწმების სარგებლობისა, ამ მიდგომას გააჩნია უარყოფითი მხარე: თუ ადამიანს სინამდვილეში არ გააჩნია ავადმყოფობა და საწყისმა ტესტმა აჩვენა დადებითი შედეგი (დაუდგინა ავადმყოფობა), ის იქნება სტრესულ მდგომარეობაში (რაც, თავის მხრივ, უარყოფითად მოქმედებს მის ცხოვრებაზე) სანამ უფრო წარმატებული ტესტი არ აჩვენებს,*

რომ ის ჯანმრთელია. ამ პრობლემის მნიშვნელობა შესაძლებელია კარგად გავიგოთ პირობითი ალბათობების ტერმინებში.

წინა დავალების მონაცემებში გამოვთვალოთ ალბათობა იმისა, რომ ტესტი აჩვენებს დადებით შედეგს. სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად:

$$P(\text{დადებითი}) = P(\text{ჯანმრთელი})P(\text{დადებითი} \mid \text{ჯანმრთელი}) +$$
$$+P(\text{ავადმყოფი})P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0198 .$$

როგორც ცნობილია, მაგალითის პირობებში

$$P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი}) = 99\% .$$

გამოვთვალოთ ახლა შებრუნებული პირობითი ალბათობა, რისთვისაც ვისარგებლოთ პირობითი ალბათობის განმარტებითა და ნამრავლის ალბათობის ფორმულებით. მაშინ ზემოთ მიღებული

$$P(\text{დადებითი}) = 0.0198 = 1.98\%$$

შედეგის თანახმად:

$$P(\text{ავადმყოფი} \mid \text{დადებითი}) = \frac{P(\text{ავადმყოფი} \cap \text{დადებითი})}{P(\text{დადებითი})} =$$
$$= \frac{P(\text{ავადმყოფი})\ P(\text{დადებითი} \mid \text{ავადმყოფი})}{1.98\%} = \frac{1\% \cdot 99\%}{1.98\%} = 50\% .$$

როგორც ვხედავთ, პირობითი ალბათობა იმისა რომ ტესტი მოგვცემს დადებით შედეგს, პირობაში რომ ადამიანი ავადმყოფია ტოლია 99%-ის, მაშინ როდესაც პირობითი ალბათობა იმისა რომ ადამიანი ავადმყოფია, პირობაში რომ ტესტმა მოგვცა დადებითი შედეგი არის მხოლოდ 50%. აქ შერჩეული მონაცემების შემთხვევაში უკანასკნელი შედეგი შეიძლება ჩაითვალოს მიუღებელად: ადამიანების ნახევარი, რომელთა ტესტირებამ აჩვენა დადებითი შედეგი, ფაქტობრივად, არის ჯანმრთელი.

მაგალითი 17. ყუთში მოთავსებულია ორი მონეტა: A_1 – სიმეტრიული მონეტა გერბის მოსვლის ალბათობით 1/2, და A_2 – არასიმეტრიული მონეტა გერბის მოსვლის ალბათობით 1/3.

შემთხვევით ვიღებთ ერთ მონეტას და ვაგდებთ. დავუშვათ, რომ მოვიდა გერბი. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული მონეტა იყო სიმეტრიული?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე იქნება:

$$\Omega=\{(A_1,\text{გ}),(A_1,\text{ს}),(A_2,\text{გ}),(A_2,\text{ს})\},$$

სადაც მაგალითად, $(A_1,\text{გ})$ – ნიშნავს, რომ ამოვიღეთ A_1 მონეტა და მისი აგდების შედეგად მოვიდა გერბი. ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A_1)=P(A_2)=1/2,\ P(\text{გ}\,|\,A_1)=1/2 \text{ და } P(\text{გ}\,|\,A_2)=1/3.$$

შესაბამისად, ნამრავლის ალბათობის ფორმულის გამოყენებით გამოვითვლით:

$$P\{(A_1,\text{გ})\}=1/4,\ P\{(A_1,\text{ს})\}=1/4,\ P\{(A_2,\text{გ})\}=1/6 \text{ და } P\{(A_2,\text{ს})\}=1/3.$$

ამიტომ ბაიესის ფორმულის თანახმად

$$P(A_1\,|\,\text{გ})=\frac{P(A_1)P(\text{გ}\,|\,A_1)}{P(A_1)P(\text{გ}\,|\,A_1)+P(A_2)P(\text{გ}\,|\,A_2)}=\frac{3}{5}.$$

ცხადია, რომ $P(A_2\,|\,\text{გ})=2/5$.

მაგალითი 18 (კეთილ გამომცდელზე I). ვთქვათ, ჩასაბარებელი გვაქვს გამოცდა და შეგვიძლია ავირჩიოთ ნებისმიერი სამი გამომცდელიდან. დავუშვათ, ჩვენთვის ცნობილია, რომ ერთ-ერთი სამი გამომცდელიდან (უცნობია რომელი) – „კეთილია“ და ალბათობა იმისა, რომ მასთან ჩააბარო გამოცდა ტოლია 0.4-ის, ხოლო დანარჩენი ორი გამომცდელი „ავია“ და მათთან გამოცდის ჩაბარების ალბათობა ტოლია 0.1-ის. შემთხვევით ავირჩიეთ გამომცდელი და წარმატებით ჩავაბარეთ გამოცდა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ ავირჩიეთ „კეთილი“ გამომცდელი?

ამოხსნა. შემოვიღოთ შემდეგი ხდომილებები: A – ამორჩეული გამომცდელი „კეთილია“ (მაშინ $\overline{A}$ – იქნება ხდომილება, რომ ამორჩეული გამომცდელი „ავია“) და B – გამოცდა ჩაბარე-

ბულია (შესაბამისად, $\overline{B}$ – გამოცდა არაა ჩაბარებული). ამოცანის პირობებში გვაქვს:

$$P(A) = 1/3,\ P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 2/3;$$
$$P(B \mid A) = 0.4,\ P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 0.6;$$
$$P(B \mid \overline{A}) = 0.1,\ P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 1 - P(B \mid \overline{A}) = 0.9.$$

ცნობილია, რომ მოხდა B ხდომილება და გამოსათვლელია პირობითი ალბათობა $P(A \mid B)$. ვინაიდან, A და $\overline{A}$ ხდომილებები ქმნის სრულ სისტემას, ბაიესის ფორმულის თანახმად საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A})} = \frac{2}{3}.$$

დავალება. მე-18 მაგალითის პირობებში გამოთვალეთ ალბათობა იმისა, რომ არჩეულ იქნა „ავი“ გამომცდელი, თუ ცნობილია, რომ გამოცდა ჩაბარებულ იქნა წარმატებით?

მაგალითი 19 (კეთილ გამომცდელზე II). დავუშვათ, რომ გამომცდელთან, რომელთანაც წარმატებით ჩაიარა გამოცდამ (იხ. მაგალითი 18) გამოსაცდელად რიგრიგობით მივიდა კიდევ ორი მოსწავლე. ჯერ გამოცდა ვერ ჩააბარა მეორე მოსწავლემ, შემდეგ მივიდა მესამე და მანაც ვერ ჩააბარა გამოცდა. ამ ფაქტის შემდეგ რომელი ჰიპოთეზაა უფრო დასაჯერებელი: ეს გამომცდელი „კეთილია“ თუ „ავი“?

ამოხსნა. აღვნიშნოთ $P_i(A)$ (შესაბამისად, $P_i(\overline{A})$) სიმბოლოთი აპოსტერიორული ალბათობა იმისა, რომ ეს გამომცდელი „კეთილია“ (შესაბამისად, „ავია“) მას შემდეგ, რაც გამოცდილ იქნა i-ური სტუდენტი, $i = 1,2,3$. ჩვენ უკვე დავადგინეთ, რომ $P_1(A) = 2/3$. შესაბამისად,

$$P_1(\overline{A}) = 1 - P_1(A) = 1/3.$$

მეორე მოსწავლის თვალსაზრისით ეს ალბათობები წარმოადგენს ორი შესაძლო ჰიპოთეზის აპრიორულ ალბათობებს.

ამიტომ, ბაიესის ფორმულის თანახმად, მეორე სტუდენტის ჩაჭრის შემდეგ აპოსტერიორული ალბათობები იქნება:

$$P_2(A)=\frac{P(\overline{B}\,|\,A)P_1(A)}{P(\overline{B}\,|\,A)P_1(A)+P(\overline{B}\,|\,\overline{A})P_1(\overline{A})}=\frac{4}{7} \text{ და } P_2(\overline{A})=1-P_2(A)=\frac{3}{7}.$$

ანალოგიურად, ახლა მიღებული ალბათობები უკვე იქნება აპრიორული ალბათობები მესამე მოსწავლისათვის და ამიტომ საძიებელი აპოსტერიორული ალბათობები, მას შემდეგ რაც მესამე მოსწავლემ ვერ ჩააბარა გამოცდა, გამოითვლება ისევ ბაიესის ფორმულით:

$$P_3(A)=\frac{P(\overline{B}\,|\,A)P_2(A)}{P(\overline{B}\,|\,A)P_2(A)+P(\overline{B}\,|\,\overline{A})P_2(\overline{A})}=\frac{8}{17} \text{ და}$$

$$P_3(\overline{A})=1-P_3(A)=\frac{9}{17}>P_3(A).$$

როგორც ვხედავთ, ექსპერიმენტის (გამოცდის) დაწყების წინ აპრიორული ალბათობა იმისა, რომ არჩეული გამომცდელი „კეთილია“ ტოლი იყო 1/3-ის. ექსპერიმენტების შემდეგ ამ ხდომილების აპოსტერიორული ალბათობა გაიზარდა და გახდა 8/17. მიუხედავად ამისა, თუ სამი ექსპერიმენტის შემდეგ მისაღებია გადაწყვეტილება ამ გამომცდელის შესახებ, მაშინ უფრო სარწმუნოა ჩავთვალოთ იგი „ავად“ (ვინაიდან, $P_3(\overline{A})>P_3(A)$).

დამოუკიდებელი ცდები.

მაგალითი 20. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ წესიერი მონეტის 10-ჯერ აგდებისას 2-ჯერ მოვა გერბი?

ამოხსნა. ვისარგებლოთ ბერნულის ფორმულით. ამ შემთხვევაში: $n=10$, $k=2$ და $p=q=1/2$. შესაბამისად,

$$P_{10}(2)=C_{10}^2(\frac{1}{2})^2\cdot(\frac{1}{2})^{10-2}=\frac{45}{1024}\approx 0.044.$$

მაგალითი 21. ერთი გასროლით მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 1/8. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ 12 გასროლიდან არც ერთი მოხვდება მიზანს?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში გვაქვს: $n=12$, $k=0$, $p=1/8$ და $q=7/8$. ამიტომ ბერნულის ფორმულის თანახმად:

$$P_{12}(0)=C_{12}^{0}(\frac{1}{8})^{0}\cdot(\frac{7}{8})^{12}=(\frac{7}{8})^{12}\approx 0.25.$$

მაგალითი 22. ყუთში 3 თეთრი და 5 შავი ბურთია. ყუთიდან შემთხვევით იღებენ 4 ბურთს დაბრუნებით. იპოვეთ ალბათობა იმისა, რომ ამოღებული ბურთებიდან თეთრი ბურთების რაოდენობა მეტი იქნება შავი ბურთების რაოდენობაზე?

ამოხსნა. თუ წარმატებად ჩავთვლით თეთრი ბურთის ამოღებას, მაშინ პირობის თანახმად ერთ ცდაში წარმატების ალბათობა იქნება $p=3/8$. საძიებელი ხდომილების ხელშემწყობ უთავსებად შემთხვევებს წარმოადგენს ოთხ ცდაში 3 ან 4 თეთრი ბურთის ამოღება, რომელთა ალბათობები, ბერნულის ფორმულის თანახმად, შესაბამისად ტოლია:

$$P_4(3)=C_4^3\cdot(3/8)^3\cdot(1-3/8)^{4-3}=135/1024 \text{ და}$$
$$P_4(4)=C_4^4\cdot(3/8)^4\cdot(5/8)^0=81/4096.$$

შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა, ალბათობათა შეკრების კანონის თანახმად, იქნება:

$$135/1024+81/4096=621/4096.$$

მაგალითი 23. დავუშვათ, ვამოწმებთ დეფექტურობაზე საქონლის პარტიას, რომელიც შედგება 30 ნაწარმისაგან. ცნობილია, რომ დეფექტური პროდუქციის წილი შეადგენს 5%-ს. როგორია საქონლის ამ პარტიაში დეფექტური პროდუქციის ამა თუ იმ რიცხვის აღმოჩენის ალბათობები?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ექსპერიმენტების რიცხვია $n=30$, ხოლო ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად $p=5/100=0.05$ (შესაბამისად, $q=0.95$). შესაბამისად, გვაქვს:

$$P_{30}(0)=C_{30}^{0}0.05^{0}0.95^{30-0}=0.95^{30}=0.2146,$$

გარდა ამისა,

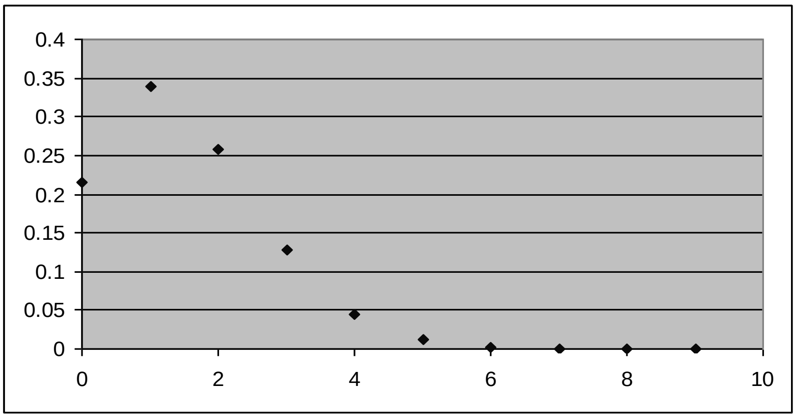
$$P_{30}(k+1)=\frac{30-k}{k+1}\frac{p}{q}P_{30}(k)=\frac{30-k}{k+1}\frac{0.05}{0.95}P_{30}(k)=\frac{30-k}{19(k+1)}P_{30}(k),$$

საიდანაც, როცა $k=0$: $P_{30}(0+1)=\frac{30-0}{19\cdot(0+1)}\cdot 0.2146=0.3389$;

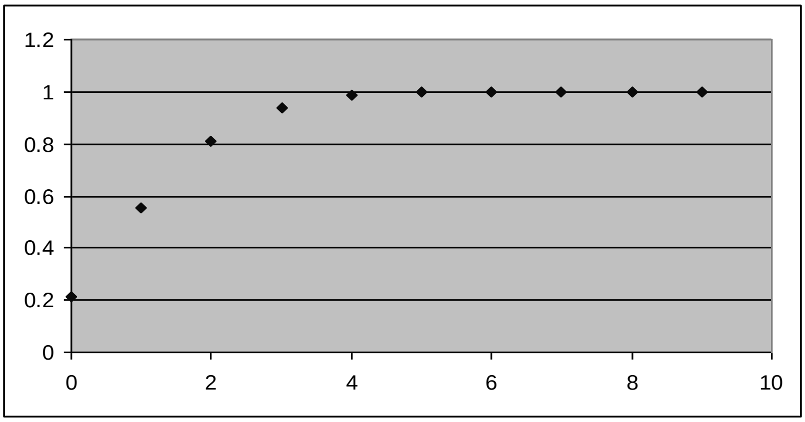
როცა $k=1$: $P_{30}(1+1)=\frac{30-1}{19\cdot(1+1)}\cdot 0.3389=0.2586$ და ა. შ. საბოლოოდ გვექნება შემდეგი ცხრილი:

დეფექტური ნაწარმის რიცხვი **k**	ალბათობა $P_n(k)$	კუმულატიური ალბათობა $\overline{P}_n(k)$
0	0.2146	0.2146
1	0.3389	0.5535
2	0.2586	0.8122
3	0.1270	0.9392
4	0.0451	0.9844
5	0.0124	0.9967
6	0.0027	0.9994
7	0.0005	0.9999
8	0.0001	0.999998
9	0.000001	0.999999

ამ ცხრილის შესაბამისი ალბათობების განაწილების გრაფიკი იქნება:



კუმულატიური ალბათობების შესაბამისი განაწილების გრაფიკი იქნება:



მაგალითი 24. საშუალოდ ბანკის მიერ გაცემული კრედიტების 5% არ ბრუნდება. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ბანკის მიერ გაცემულ 100 კრედიტიდან დაბრუნების პრობლემა შეიქმნება არანაკლებ ორ შემთხვევაში. იგულისხმება, რომ კრედიტები გაიცემა და ბრუნდება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად.

ამოხსნა. კრედიტის არ დაბრუნებას დავარქვათ „წარმატება“ და ვისარგებლოთ ბერნულის სქემით, სადაც „წარმატების“ ალბათობა $p=0.05$. ერთი და იგივე ცდა, რომელიც მდგომარეობს კრედიტის გაცემაში, მეორდება $n=100$-ჯერ. მოსაძებნია ალბათობა ხდომილების – A={კრედიტი არ დაბრუნდება 2 შემთხვევაში მაინც}. გადავიდეთ საწინააღმდეგო ხდომილებაზე – $\overline{A}$={კრედიტი არ დაბრუნდება ორზე ნაკლებ შემთხვევაში}. ეს უკანასკნელი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ორი ხდომილების გაერთიანების სახით: B={კრედიტი არ დაბრუნდება 0 შემთხვევაში} და C={კრედიტი არ დაბრუნდება 1 შემთხვევაში}. შესაბამისად, ბერნულის ფორმულის თანახმად გვექნება:

$$P(\overline{A})=P(B)+P(C)=C_{100}^{0}\cdot(0.05)^{0}\cdot(0.95)^{100}+C_{100}^{1}\cdot(0.05)^{1}\cdot(0.95)^{99}=$$
$$=(0.95)^{100}+5\cdot(0.95)^{99}.$$

ამიტომ საძიებელი ალბათობა იქნება:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0.95)^{100}-5\cdot(0.95)^{99}\approx 0.96.$$

სავარჯიშო 1. ექსპერიმენტი მდგომარეობს სამი სათამაშო კამათლის გაგორებაში. იპოვეთ ალაბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის 10-ჯერ გამეორებისას ზუსტად 4 ექსპერიმენტში მოვა ზუსტად ორ-ორი „6“?

სავარჯიშო 2. რამდენი შემთხვევითი ციფრი უნდა ავიღოთ, რომ ციფრი „5“ მოვიდეს ერთჯერ მაინც არანაკლებ 0.9-ის ტოლი ალბათობით?

მაგალითი 25. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული 500 ადამიანიდან 2 დაიბადა 1 თებერვალს?

ამოხსნა. ბუნებრივია ვიგულისხმოთ, რომ უცნობი ადამიანის დაბადების დღე ტოლი ალბათობით შეიძლება იყოს წლის ნებისმიერი დღე, ანუ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ადამიანი დაბადებულია 1 თებერვალს იქნება 1/365. ვინაიდან ეს რიცხვი ახლოსაა 0-თან, ამიტომ უნდა ვისარგებლოთ პუასონის მიახლოებითი ფორმულით, სადაც $n=500, k=2, p=1/365,$ $\lambda=500/365\approx 1.3699$. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P_{500}(2) =\approx \frac{1.3699^2}{2!}\cdot e^{-1.3699} \approx 0.2385.$$

მაგალითი 26. ყოველ 1000 კაცში დაახლოებით 8 ცაციაა. როგორია ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეულ 100 კაცში არ აღმოჩნდება არც ერთი ცაცია?

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში $n=100, k=0, p=8/1000, \lambda=100\cdot 0.008=0.8$. ამიტომ, საძიებელი ალბათობა იქნება

$$P_{100}(0) \approx \frac{0.8^0}{0!}\cdot e^{-0.8} \approx 0.4493.$$